

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И ПРОГНОЗ

УДК 330.4(470.2)

© Гаврилец Ю.Н.

© Чекмарева Е.А.

## Моделирование равновесного функционирования экономики в Северо-Западном федеральном округе\*

*Данная статья представляет результаты оценки характеристик экономического равновесия в регионах Северо-Западного федерального округа в период с 2000 по 2008 г. на основе простейших математических моделей, отражающих динамику потребительского спроса, предложения труда и интенсивности использования трудового потенциала в процессе рыночного функционирования региональной экономики.*

*Региональное экономическое равновесие, трудовая активность, общее равновесие, локальное равновесие, устойчивость.*



**Юрий Николаевич  
ГАВРИЛЕЦ**

доктор экономических наук, профессор, зав. лабораторией  
Центрального экономико-математического института РАН  
yurkag@mail.ru



**Елена Андреевна  
ЧЕКМАРЕВА**

младший научный сотрудник Института социально-экономического  
развития территорий РАН  
miteneva@inbox.ru

Изучение формирования и поддержания локального и общего экономического равновесия в процессе функционирования рынка является важной задачей, решение которой интересно и с практической точки зрения. Экономико-математические модели равновесного функционирования экономики, как и любые модели, не будучи точной копией моделируемого объекта, отражают его отдельные свойства, значимые для

решения конкретной задачи и понимания определённой стороны действительности. Примерами таких моделей служат модель поведения однородной группы «производители – потребители» [1, 4], модель поведения для случая двух кластеров [3], модель поведения  $m$  групп ( $m > 1$ ), связанных общим рынком производства и потребления продукции с ограничением на общее число «рабочих мест» и без него [1, 2, 4].

\* Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант №10-06-00362).

### 1. Модель

В данной статье представлены расчеты, проведённые по модели [4].

Рассматривается однопродуктовая статическая модель (далее – последовательность таких моделей, связанных между собой определённым образом). Основным элементом используемой для расчётов модели являются «участники» – представители некоторой однородной группы. В нашем случае в качестве групп рассматривались регионы Северо-Западного федерального округа, а «участниками» групп считались занятые и безработные жители региона, то есть экономически активное население.

Предположения модели:

- Поведение участников на рынке заключается в трудовой деятельности, в результате которой каждая группа производит продукт, и в потреблении выпущенного продукта. Кроме того, часть заработанных денежных средств группа отчисляет на «общественные нужды», налоги, сбережения, трансферты и т.д. Такие отчисления условно названы «общественной нагрузкой» или «налогом».

- Поведение участников группы рационально в следующем смысле: если отчисления региона фиксированы, то, рассматривая затраты труда и уровень потребления как неизвестные величины, можно считать, что соотношение между ними определяется так, что максимизируется некоторая целевая функция, например функция полезности.

Принятые обозначения:

$k$  – номер группы (региона);

$N_k$  – численность группы;

$\ell_k$  – интенсивность труда отдельного участника  $k$ -ой группы;

$T_k$  – предельная (максимально возможная) интенсивность труда отдельного участника  $k$ -ой группы (трудовой потенциал);

$x_k$  – объём потребления отдельного участника  $k$ -ой группы;

$a_k$  – производительность труда при единичной интенсивности труда;

$a_k \cdot \ell_k$  – выпуск продукции отдельным участником  $k$ -ой группы;

$X_k^o$  – минимальное количество продукта, которое обязана произвести группа;

$\lambda_k$  – некоторый строго положительный параметр, устанавливающий связь между доходом индивида и численностью его группы, условно названный «привлекательностью» группы;

$p$  – цена продукта (формируется общим рынком);

$q_k$  – денежные отчисления («налог», «общественная нагрузка»).

Предполагается, что в рыночных условиях выполнено следующее бюджетное ограничение:  $p \cdot x_k = p \cdot a_k \cdot \ell_k - q_k$ .

Функция полезности участника  $k$ -ой группы имеет вид:

$$U_k(x_k, \ell_k) = \ln(x_k) + b_k \cdot \ln(T_k - \ell_k),$$

где  $b_k$  – некоторый коэффициент индивидуального соизмерения полезностей труда и потребления.

При указанном бюджетном ограничении функция полезности максимизируется в точке:

$$x_k = \frac{a_k \cdot T_k - q_k}{1 + b_k}, \ell_k = \frac{a_k \cdot T_k + b_k \cdot q_k}{a_k \cdot (1 + b_k)} \quad (1)$$

В работе используются два типа моделей экономического равновесия: локальное и общее равновесие.

**Определение.** Локальным равновесием  $k$ -ой группы назовём такой набор переменных  $x_k^*$ ,  $\ell_k^*$ ,  $p^*$ ,  $q_k^*$ , при котором выполняются условия:

1) локальный баланс:

$N_k \cdot (a_k \cdot \ell_k^* - x_k^*) = X_k^o$  (важно, что здесь фиксирована «нагрузка» на данную группу);

2) гиперболическое распределение по доходу в группе:

$$N_k = \frac{\lambda_k}{p^* \cdot x_k^*};$$

3) максимизация функции полезности участников группы:

$$U(x_k^*, \ell_k^*) \geq U(x_k, \ell_k), \quad (2)$$

$$\text{где } p^* \cdot x_k^* = p^* \cdot a_k \cdot \ell_k^* - q_k^*.$$

Нетрудно увидеть (см. [4]), что при заданных параметрах  $N_k, X_k^0, T_k, a_k, b_k, \lambda_k$  локальное равновесие существует и единственно.

В случае, когда все группы (регионы) связаны совместным рынком производства и потребления продукции, имеет смысл говорить об общем межгрупповом равновесии.

**Определение.** Межгрупповым общим равновесием назовём совокупность переменных состояния системы  $\{x_k^*, \ell_k^*\}$  и ценовых параметров  $p^*, q_1^*, q_2^*, \dots, q_k^* > 0$ , которые удовлетворяют условиям:

1) общий баланс:

$$\sum_k N_k \cdot (a_k \cdot \ell_k^* - x_k^*) = X^0. \quad (3)$$

(здесь фиксирована лишь общая «нагрузка»);

2) гиперболическое распределение по доходу во всех группах:

$$N_k = \frac{\lambda_k}{p^* \cdot x_k^*}; \quad (4)$$

3) максимизация функций полезности участников всех групп:

$$U_k(x_k^*, \ell_k^*) \geq U_k(x_k, \ell_k) \text{ для всех } x_k, \ell_k \text{ таких, что}$$

$$p^* \cdot x_k^* \leq p^* \cdot a_k \cdot \ell_k^* - q_k^*.$$

Доказано [4], что при выполнении условий а)  $\sum_k N_k \cdot a_k \cdot T_k > X^0$

б)  $U_k(x_k, \ell_k) = \ln(x_k) + b_k \cdot \ln(T_k - \ell_k)$  общее межгрупповое равновесие существует и единственно и может быть найдено по формулам:

$$p^* = \frac{\sum_k \lambda_k \cdot (1 + b_k)}{\sum_k a_k \cdot T_k \cdot N_k - X^0}, \quad (5)$$

$$q_k^* = a_k \cdot T_k \cdot p^* - \frac{\lambda_k \cdot (1 + b_k)}{N_k},$$

$$x_k^* = \frac{a_k \cdot T_k - \frac{q_k^*}{p^*}}{1 + b_k},$$

$$\ell_k^* = \frac{a_k \cdot T_k + b_k \cdot \frac{q_k^*}{p^*}}{a_k \cdot (1 + b_k)}.$$

При этом параметры общего равновесия образуют локальное равновесие для каждой группы (региона), а равновесные потребление и интенсивность труда  $\{x_k^*, \ell_k^*\}$  максимизируют функцию общественного благосостояния  $W = \sum_k \lambda_k \cdot U_k(x_k, \ell_k)$ .

Если в конкретный момент времени  $t$  равновесие нарушается, величина «налога»  $q$  будет меняться до тех пор, пока не достигнет необходимого значения при данном  $p$ . При этом предполагается, что в каждый момент времени  $t$  цена  $p$  и «налог»  $q$  формируют следующие характеристики:

1)  $x(p, q)$  – объём потребления отдельного участника;

2)  $\ell(p, q)$  – интенсивность труда;

3)  $n(p, q) = \frac{\lambda}{p \cdot x(p, q)}$  – предложение

труда в объёме текущей численности группы.

Механизм корректировки цены и налога во времени в процессе поддержания локального равновесия может быть описан системой двух дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \mu \cdot \left( X^0 - \frac{q}{p} \cdot \frac{\lambda \cdot (1 + b)}{a \cdot T \cdot p - q} \right) \\ \frac{dq}{dt} = \nu \cdot \left( a \cdot T \cdot p - \frac{\lambda \cdot (1 + b)}{N} - q \right) \end{cases} \quad (6)$$

Условием устойчивости локального равновесия является выполнение неравенства:

$$\frac{\mu}{\nu} > \frac{a \cdot T \cdot N \cdot X^0 - (X^0)^2}{\lambda \cdot (1+b)}$$

Процесс поддержания рыночным механизмом общего равновесия описывается системой из  $k+1$  дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \frac{dp}{dt} = \mu \cdot \left( X^0 - \sum_k \frac{\lambda_k \cdot (1+b_k)}{a_k \cdot T_k \cdot p - q_k} \cdot \frac{q_k}{p} \right) \\ \frac{dq_1}{dt} = \nu_1 \cdot \left( a_1 \cdot T_1 \cdot p_1 - \frac{\lambda_1 \cdot (1+b_1)}{N_1} - q_1 \right) \\ \dots \\ \frac{dq_k}{dt} = \nu_k \cdot \left( a_k \cdot T_k \cdot p_k - \frac{\lambda_k \cdot (1+b_k)}{N_k} - q_k \right) \end{cases} \quad (7)$$

Оценка устойчивости общего межгруппового равновесия является более сложной задачей по сравнению с оценкой устойчивости локальных равновесий и может быть решена путём нахождения собственных значений матрицы частных производных от функций, представленных в правых частях дифференциальных уравнений системы (матрицы размером  $(k+1) \times (k+1)$ ). При этом условием устойчивости будет являться отрицательность действительных частей всех  $(k+1)$  собственных чисел данной матрицы.

Таким образом, использование описанной модели на реальных данных предоставит возможность оценивать не только характеристики экономического равновесия, но и устойчивость общего и локальных равновесий, а также вероятные изменения перечисленных показателей в динамике.

## 2. Исходные данные

Применение описанной модели для реальных расчётов требует придания её параметрам конкретных значений, вследствие чего возникает проблема создания и обоснования определённой процедуры «оцифровки» параметров модели.

Для оценки характеристик экономического равновесия в регионах Северо-Западного федерального округа использовались данные о валовом региональном продукте, конечном потреблении населения, оплате труда, численности занятых и безработных, представленные на официальном сайте Федеральной службы государственной статистики, а также материалы статистических сборников. При этом с целью обеспечения возможности сопоставления данных по годам все денежные показатели были пересчитаны в ценах 2000 г.

Конкретно процедура «оцифровки» параметров модели была следующей:

*Шаг 1.* Каждому региону Северо-Западного федерального округа (СЗФО) присваивался номер  $k$  – им может быть номер по порядку в перечне субъектов СЗФО в статистических сборниках.

*Шаг 2.* По данным Федеральной службы государственной статистики находились значения таких переменных, как  $Y$  – валовой региональный продукт;  $X$  – фактическое конечное потребление домашних хозяйств;  $S$  – фонд заработной платы, начисленной работникам списочного состава и внешним совместителям;  $L$  – среднегодовая численность занятых в экономике;  $B$  – численность безработных. Все показатели брались за период с 2000 по 2008 год в сопоставимом виде.

*Шаг 3.* Численности групп принимались равными объёму занятых:  $N_k = L_k$ .

*Шаг 4.* Предполагалось, что интенсивность труда отражается в его оплате, поэтому для одного занятого она рассчитывалась как:

$$\ell_k = \frac{S_k}{L_k}$$

*Шаг 5.* Расчёт максимально возможной интенсивности труда:

$$T_k = \frac{S_k \cdot (L_k + B_k)}{(L_k)^2}$$

**Шаг 6.** Расчёт объёма потребления отдельного участника:

$$x_k = \frac{X_k}{L_k}$$

(считается, что весь объём фактического конечного потребления домашних хозяйств приходится на занятых в экономике).

**Шаг 7.** Расчёт минимального количества продукта, которое обязан произвести регион:  $X_k^o = Y_k - X_k$  (для локального равновесия; для общего равновесия:

$$X^o = \sum_k X_k^o).$$

**Шаг 8.** Расчёт производительности труда при единичной интенсивности труда:

$$a_k = \frac{Y_k}{S_k}$$

(выпуск на единицу оплаты труда).

**Шаг 9.** Расчёт коэффициента индивидуального соизмерения полезностей труда и потребления:

$$b_k = \frac{Y_k \cdot B_k}{X_k \cdot L_k}.$$

Эта формула получена из предположения, что состояние каждого региона оптимально в смысле максимизации его функции полезности.

**Шаг 10.** Расчёт привлекательности региона:

$$\lambda_k = \frac{X_k \cdot 10000}{\sum_k X_k}$$

(множитель 10000 использовался с целью увеличения масштаба). Так как общее равновесие Парето – оптимально, существуют эти коэффициенты, соизмеряющие полезности регионов и указывающие «привлекательность» для формирования численностей занятых.

Таким образом, все параметры модели приняли конкретный смысл и числовое выражение. Исходные данные представлены в *приложении*.

Далее при расчётах принимается, что наблюдаемое положение регионов СЗФО образует равновесие в смысле описанной выше модели.

### **3. Концепция анализа устойчивости рынка по данным статистической отчётности**

Использование для эмпирического анализа динамических уравнений (7), описывающих процесс «нащупывания» стационарного равновесия, сталкивается с методологическими и методическими трудностями.

Во-первых, как интерпретировать равновесные цены  $p^*$ , определяющие зависящие от них «налоги»  $q^*$ ?

Во-вторых, как подойти к эмпирической оценке «скоростей» реакции рынка  $\mu$  и  $\nu$ ?

В-третьих, как описать эту динамику стационарных равновесий?

Ответ на эти вопросы мы даём, конкретизируя представления о процессе развития экономики регионов в терминах однопродуктовой модели.

Будем считать, что все параметры модели ( $a, b, T, \dots$ ) меняются экзогенно известным нам образом. «Медленное» время меняется дискретно: 2000, 2001, ..., 2008 год. В каждый такой момент система регионов находится в экономическом равновесии. Это равновесие достигается в результате процесса (7) в течение «быстрого» времени, когда из состояния, определяемого параметрами  $a(t), b(t), T(t) \dots$ , но оцениваемого ценами предыдущего равновесия  $p^*(t-1), q^*(t-1)$ , система переходит в новое равновесие  $p^*(t), q^*(t)$ . Этот переход осуществляется со «скоростями»  $\mu$  и  $\nu$ . Обозначив правые части системы (7) через  $F(p, q)$  и  $Gk(p, q)$  (здесь  $q$  – набор трансфертов-«налогов»), мы получаем:

$$\Delta p = \mu \cdot \Delta F,$$

$$\Delta q = \nu \cdot \Delta G.$$

Из этих соотношений могут быть рассчитаны  $\mu$  и  $\nu$ .

Что касается содержательного смысла равновесной цены  $p^*$ , то заметим, что её значение пропорционально всем величинам  $\lambda$  (см. формулу (4)).

Поэтому мы можем выбирать удобный для нас масштаб. В частности, поделив все  $\lambda$  на  $p^*$ , мы получим равновесную цену, равную 1. Т. е. принимаем, что все статистические данные измерены в ценах равновесия. При этом все выводы об устойчивости полностью сохраняют свою силу.

#### 4. Результаты расчётов

Оценка равновесных цены и «налога» показала, что в период с 2000 по 2008 г. рыночное функционирование регионов Северо-Западного федерального округа характеризовалось снижением цены с одновременным спадом «общественной нагрузки» во всех регионах округа (табл. 1). Так, в Санкт-Петербурге за рассматриваемые 9 лет «налог» снизился в 8,7 раза, при этом цена совокупного продукта упала в 2,4 раза.

В среднем за период наибольшим «налогом» облагались занятые в Вологодской области, наименьшим – в Псковской. При этом отрицательные значения «общественной нагрузки» в Псковской области объясняются тем, что данная область является дотационной.

Отметим, что поскольку равновесное состояние максимизирует общественную полезность

$$W = \sum_k \lambda_k \cdot U_k(x_k, l_k),$$

то величина равновесной цены показывает значение множителя Лагранжа соответствующей задачи максимизации. Оно отражает относительную ценность единицы производимого и потребляемого в федеральном округе продукта с точки зрения общественной полезности. Падение этой цены во времени означает соответствующее уменьшение ценности, что отражает в определённой степени процент дисконтирования. Заметим, это падение происходит на фоне роста масштаба производства и потребления в регионах. «Налог»  $q$  (цена нагрузки) является как бы платой каждого занятого за участие в экономической жизни района, стоимостью одного рабочего места. В рыночном процессе (описываемом соответствующим дифференциальным уравнением) эта стоимость колеблется в зависимости от того, как соотносится количество желающих трудиться ( $N_k$ ) с количеством рабочих мест ( $L_k$ ).

Снижение «налога» сопровождалось повышением предельной интенсивности труда (трудового потенциала) во всех регионах. За период с 2000 по 2008 г. трудовой

Таблица 1. Динамика цены продукта ( $p$ ) и «налога» ( $q$ )

| Регион                          | 2000 г. | 2001 г. | 2002 г. | 2003 г. | 2004 г. | 2005 г. | 2006 г. | 2007 г. | 2008 г. |
|---------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <i>Цена (<math>p</math>)</i>    |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| СЗФО                            | 0,029   | 0,026   | 0,024   | 0,022   | 0,019   | 0,017   | 0,015   | 0,013   | 0,012   |
| <i>«Налог» (<math>q</math>)</i> |         |         |         |         |         |         |         |         |         |
| Республика Карелия              | 1,051   | 0,915   | 0,779   | 0,685   | 0,520   | 0,457   | 0,310   | 0,383   | 0,201   |
| Республика Коми                 | 1,948   | 1,539   | 1,109   | 1,106   | 0,874   | 0,701   | 0,646   | 0,487   | 0,478   |
| Архангельская область           | 1,646   | 1,384   | 1,171   | 1,202   | 1,424   | 1,282   | 1,142   | 1,186   | 0,975   |
| Вологодская область             | 2,020   | 1,732   | 1,53    | 1,531   | 1,511   | 1,296   | 1,106   | 1,030   | 0,828   |
| Калининградская область         | 0,199   | 0,298   | 0,219   | 0,285   | 0,309   | 0,149   | 0,079   | 0,125   | 0,077   |
| Ленинградская область           | 1,212   | 1,103   | 1,214   | 1,391   | 1,173   | 0,980   | 0,940   | 0,875   | 0,854   |
| Мурманская область              | 1,740   | 1,547   | 1,248   | 1,109   | 0,946   | 0,704   | 0,553   | 0,453   | 0,289   |
| Новгородская область            | 0,612   | 0,697   | 0,488   | 0,514   | 0,461   | 0,349   | 0,230   | 0,167   | 0,089   |
| Псковская область               | 0,296   | 0,171   | -0,013  | -0,14   | -0,223  | -0,271  | -0,355  | -0,257  | -0,342  |
| г. Санкт-Петербург              | 0,628   | 0,463   | 0,562   | 0,584   | 0,381   | 0,148   | 0,076   | 0,092   | 0,072   |
| Источник: расчёты авторов.      |         |         |         |         |         |         |         |         |         |

потенциал участников рынка Вологодской области возрос в 2,1 раза. При этом по среднему за период значению предельной интенсивности труда область находилась только на 6 месте среди регионов СЗФО. Наибольшим трудовым потенциалом отличалась Республика Коми, наименьшим – Псковская область (табл. 2).

Оценка экономической привлекательности регионов СЗФО показала, что в течение всего исследуемого периода наиболее привлекательным для участников рынка выглядел город Санкт-Петербург: значения соответствующего параметра  $\lambda$  превосходили показатели других регионов в среднем в 5 – 12 раз (табл. 3). Кроме того, привлекательность Санкт-Петербурга возросла на 15%. Рост привлекательности характерен также в целом для Ленинградской области. Большинство остальных регионов СЗФО, не отличаясь высокими зна-

чениями  $\lambda$ , за рассматриваемые 9 лет ещё более снизили свою экономическую привлекательность (например, Мурманская область – на 27%). Наименее привлекательной являлась Новгородская область.

В исследуемый период наблюдался спад производительности труда (понимаемой как объём выпуска на единицу оплаты труда) при единичной интенсивности (параметр  $a$ ) во всех регионах СЗФО (табл. 4). Наибольшая производительность труда при единичной интенсивности в среднем за период зафиксирована в Ленинградской области. Наименьшей производительностью характеризовались занятые в экономике Псковской области.

Оценка устойчивости общего межгруппового и локальных равновесий показала, что в 2001, 2004, 2005, 2006 и 2007 гг. общий и почти все локальные рынки были неустойчивыми (табл. 5). Примечательно, что

Таблица 2. Предельная интенсивность труда («трудо́вой потенциал»)

| Регион                  | 2000 г. | 2001 г. | 2002 г. | 2003 г. | 2004 г. | 2005 г. | 2006 г. | 2007 г. | 2008 г. |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Республика Карелия      | 29,597  | 32,114  | 37,456  | 38,923  | 42,397  | 48,904  | 51,558  | 59,581  | 60,973  |
| Республика Коми         | 44,609  | 52,564  | 54,814  | 58,361  | 61,303  | 66,777  | 74,184  | 79,593  | 77,769  |
| Архангельская область   | 30,136  | 33,228  | 37,353  | 42,079  | 46,878  | 51,343  | 54,498  | 60,269  | 60,341  |
| Вологодская область     | 27,466  | 32,026  | 34,755  | 37,367  | 44,772  | 49,393  | 53,534  | 58,199  | 58,643  |
| Калининградская область | 18,020  | 20,434  | 24,991  | 27,525  | 27,352  | 29,235  | 36,371  | 42,118  | 49,374  |
| Ленинградская область   | 22,694  | 26,492  | 31,575  | 33,84   | 35,558  | 39,649  | 41,716  | 47,838  | 45,152  |
| Мурманская область      | 43,14   | 48,885  | 52,261  | 52,324  | 54,427  | 58,439  | 63,873  | 71,485  | 72,055  |
| Новгородская область    | 17,773  | 20,742  | 24,968  | 27,694  | 30,931  | 34,532  | 40,469  | 45,276  | 45,808  |
| Псковская область       | 15,167  | 17,853  | 21,611  | 24,657  | 25,062  | 28,826  | 32,149  | 37,288  | 35,401  |
| г. Санкт-Петербург      | 26,687  | 31,121  | 39,145  | 41,368  | 45,097  | 49,871  | 58,239  | 69,741  | 67,379  |

Источник: расчёты авторов.

Таблица 3. Привлекательность региона ( $\lambda$ )

| Регион                  | 2000 г. | 2001 г. | 2002 г. | 2003 г. | 2004 г. | 2005 г. | 2006 г. | 2007 г. | 2008 г. |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Республика Карелия      | 467,605 | 451,057 | 468,723 | 462,371 | 450,196 | 421,711 | 432,363 | 400,418 | 398,196 |
| Республика Коми         | 849,596 | 965,564 | 948,777 | 913,128 | 899,835 | 840,159 | 822,57  | 793,539 | 744,278 |
| Архангельская область   | 835,757 | 882,717 | 855,003 | 865,259 | 838,717 | 813,969 | 799,85  | 804,17  | 813,274 |
| Вологодская область     | 773,161 | 770,186 | 751,059 | 732,356 | 700,727 | 657,989 | 665,541 | 652,188 | 632,684 |
| Калининградская область | 601,542 | 508,561 | 530,351 | 518,954 | 492,59  | 492,548 | 534,982 | 565,512 | 563,337 |
| Ленинградская область   | 782,258 | 802,804 | 792,929 | 783,206 | 840,175 | 879,032 | 879,834 | 873,931 | 840,966 |
| Мурманская область      | 865,074 | 798,639 | 750,482 | 745,121 | 696,034 | 669,005 | 648,804 | 632,692 | 634,958 |
| Новгородская область    | 420,719 | 396,402 | 391,669 | 370,269 | 348,755 | 330,752 | 334,646 | 338,293 | 359,138 |
| Псковская область       | 376,84  | 369,127 | 405,94  | 435,519 | 436,918 | 402,293 | 408,32  | 364,535 | 377,161 |
| г. Санкт-Петербург      | 4 027,0 | 4 055,0 | 4 105,0 | 4 174,0 | 4 296,0 | 4 493,0 | 4 473,0 | 4 575,0 | 4 636,0 |

Источник: расчёты авторов.

Таблица 4. Производительность труда при единичной интенсивности (а)

| Регион                  | 2000 г. | 2001 г. | 2002 г. | 2003 г. | 2004 г. | 2005 г. | 2006 г. | 2007 г. | 2008 г. |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Республика Карелия      | 3,127   | 2,927   | 2,640   | 2,514   | 2,362   | 2,237   | 2,097   | 2,016   | 1,938   |
| Республика Коми         | 3,315   | 3,044   | 2,695   | 2,680   | 2,657   | 2,514   | 2,478   | 2,242   | 2,316   |
| Архангельская область   | 3,973   | 3,605   | 3,199   | 3,124   | 3,359   | 3,275   | 3,224   | 3,247   | 3,323   |
| Вологодская область     | 4,404   | 3,869   | 3,547   | 3,426   | 3,288   | 3,057   | 2,936   | 2,788   | 2,737   |
| Калининградская область | 3,711   | 3,149   | 2,759   | 2,695   | 2,893   | 2,764   | 2,402   | 2,402   | 2,272   |
| Ленинградская область   | 3,873   | 3,479   | 3,366   | 3,629   | 3,639   | 3,584   | 3,690   | 3,327   | 3,824   |
| Мурманская область      | 3,450   | 3,064   | 2,708   | 2,697   | 2,671   | 2,498   | 2,295   | 2,096   | 2,094   |
| Новгородская область    | 4,035   | 3,846   | 3,142   | 2,909   | 2,789   | 2,594   | 2,321   | 2,160   | 2,282   |
| Псковская область       | 3,640   | 3,086   | 2,643   | 2,371   | 2,330   | 2,068   | 1,970   | 1,751   | 1,948   |
| г. Санкт-Петербург      | 3,149   | 2,747   | 2,538   | 2,627   | 2,54    | 2,46    | 2,271   | 2,114   | 2,392   |

Источник: расчёты авторов.

Таблица 5. Устойчивость общего и локальных равновесий

| Регион                      | 2001 г. | 2002 г. | 2003 г. | 2004 г. | 2005 г. | 2006 г. | 2007 г. | 2008 г. |
|-----------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| <i>Общее равновесие</i>     |         |         |         |         |         |         |         |         |
| СЗФО                        | –       | +       | +       | –       | –       | –       | –       | +       |
| <i>Локальные равновесия</i> |         |         |         |         |         |         |         |         |
| Республика Карелия          | –       | –       | –       | –       | –       | –       | –       | +       |
| Республика Коми             | +       | +       | –       | –       | –       | –       | –       | –       |
| Архангельская область       | –       | –       | –       | –       | –       | –       | –       | +       |
| Вологодская область         | –       | –       | –       | –       | –       | –       | –       | +       |
| Калининградская область     | –       | –       | –       | –       | +       | –       | –       | +       |
| Ленинградская область       | –       | –       | –       | –       | –       | –       | –       | –       |
| Мурманская область          | –       | +       | –       | –       | –       | –       | –       | +       |
| Новгородская область        | –       | +       | –       | –       | –       | –       | –       | +       |
| Псковская область           | +       | +       | +       | +       | +       | +       | +       | +       |
| г. Санкт-Петербург          | +       | –       | –       | +       | +       | –       | –       | –       |

Примечание. Плюсами обозначены устойчивые равновесия.  
Источник: расчёты авторов.

в предкризисные 2004 – 2007 гг. не зафиксировано ни одного устойчивого общего равновесия. Возможно, длительная неустойчивость (в данном случае – 4 года) является спецификой экономического поведения регионов в предкризисный период, т.е. служит предвестником кризиса и своеобразным индикатором «нездорового» развития региональной экономики.

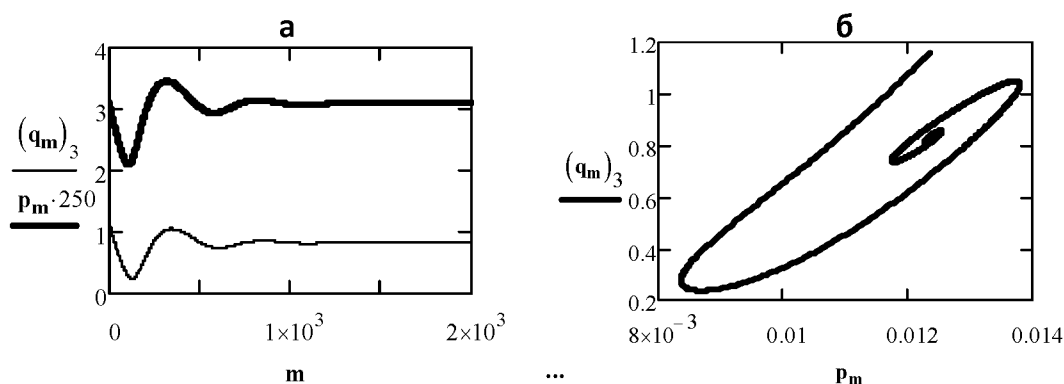
Конечно, однозначно интерпретировать неустойчивость нельзя: она может отражать или состояние Российской Федерации в целом, поскольку каждый регион является её частью, или специфику конкретного региона. В любом случае неустойчивость означает, что регион не способен

успешно справиться со своими экономическими проблемами. Так, неустойчивость общего рынка регионов СЗФО свидетельствует о том, что округ в целом не может функционировать изолированно от других округов. В то же время в Псковской области устойчивость локального рынка объясняется вовсе не рациональным хозяйствованием, а поддержанием равновесия за счёт механизма дотаций.

Наибольшее количество устойчивых локальных равновесий было отмечено в 2008 году. При этом локальный рынок Ленинградской области выделялся среди всех локальных рынков регионов СЗФО своей неустойчивостью: экономическое



Корректировка цены и «налога» в Вологодской области в процессе поддержания общего равновесия в 2008 г.



равновесие в этом регионе не удовлетворяло критерию устойчивости в течение всего периода с 2001 по 2008 г. Локальное равновесие Вологодской области было устойчивым лишь в 2008 г. (см. табл. 5).

Устойчивость общего межгруппового равновесия в 2008 г. и наибольшее количество устойчивых локальных равновесий могут свидетельствовать об оптимизации экономического поведения регионов округа, повышении рациональности этого поведения в условиях кризиса.

На рисунке отражён механизм корректировки цены и налога в Вологодской области во времени в процессе поддержания общего равновесия в 2008 г. Так как рынок устойчив, то цены и денежные трансферты при отклонении от равновесных значений не уходят от них, а стремятся к ним вернуться (*рис. а* (затухающие волны) — графики цены и налога в зависимости от времени; *рис. б* (спираль) — график налога в зависимости от цены).

Таким образом, моделирование равновесного функционирования экономики

в Северо-Западном федеральном округе на основе применения математических моделей поведения однородных групп «производители — потребители» показало, что основными тенденциями развития регионального рынка труда являются:

- снижение цены совокупного продукта;
- спад «общественной нагрузки» на занятое население («налог»);
- повышение предельной интенсивности труда, свидетельствующее об увеличении трудового потенциала;
- спад производительности труда при единичной интенсивности;
- снижение экономической привлекательности большинства регионов СЗФО при её увеличении в г. Санкт-Петербурге.

При этом достигавшееся равновесие в большинстве случаев было неустойчивым.

Перечисленные процессы неминуемо отразятся на изменении предложения труда, трудовой миграции, готовности занятых в экономике трудиться с определённой интенсивностью и повышать её, более полно использовать трудовой потенциал.

## Литература

1. Гаврилец, Ю.Н. Модель равновесного функционирования экономики с переменной структурой населения / Ю.Н. Гаврилец // Экономика и математические методы. — 1994. — Т. 30. — № 2.
2. Гаврилец, Ю.Н. Соизмерение интересов и ценовое регулирование экономики с переменной структурой населения (модельный анализ) / Ю.Н. Гаврилец // Экономика и математические методы. — 1996. — Т. 32. — № 1.

3. Гаврилец, Ю.Н. Кластерная модель экономического равновесия с подвижной социальной структурой / Ю.Н. Гаврилец, Р.И. Ананьева // труды Международной юбилейной сессии научного семинара «Многомерный статистический анализ и вероятностное моделирование реальных процессов». – М.: ЦЭМИ РАН, 2009.

4. Гаврилец, Ю.Н. Модель межрегионального рыночного взаимодействия без обмена трудовыми ресурсами / Ю.Н. Гаврилец, Ю.П. Офман // Montenegrin journal of economics. – 2009. – №10.

### Приложение

Валовой региональный продукт (Y), значение показателя за год в ценах 2000 года, миллионов рублей

| Регион                  | 2000 г.   | 2001 г.   | 2002 г.   | 2003 г.   | 2004 г.   | 2005 г.   | 2006 г.   | 2007 г.   | 2008 г.   |
|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Республика Карелия      | 28 214,6  | 29 004,6  | 31 180,0  | 31 678,8  | 32 629,2  | 34 880,6  | 36 659,5  | 39 775,6  | 37 945,9  |
| Республика Коми         | 59 473,1  | 64 171,5  | 61 989,6  | 64 407,2  | 67 692,0  | 70 399,7  | 76 454,1  | 76 148,2  | 78 661,1  |
| Архангельская область   | 61 806,9  | 65 391,7  | 66 438,0  | 71 885,9  | 87 269,5  | 95 123,7  | 101 972,6 | 114 413,3 | 114 413,3 |
| Вологодская область     | 69 195,5  | 70 510,2  | 72 273,0  | 75 597,5  | 82 854,9  | 86 583,4  | 90 739,4  | 95 367,1  | 92 220,0  |
| Калининградская область | 23 290,3  | 24 035,6  | 26 319,0  | 28 766,6  | 32 391,2  | 33 557,3  | 38 691,6  | 46 391,2  | 48 571,6  |
| Ленинградская область   | 56 001,9  | 60 706,1  | 70 540,4  | 80 627,7  | 87 642,3  | 96 056,0  | 106 814,3 | 113 543,6 | 119 561,4 |
| Мурманская область      | 55 135,0  | 56 017,2  | 54 896,8  | 55 500,7  | 57 609,7  | 58 992,3  | 60 585,1  | 61 918,0  | 61 794,2  |
| Новгородская область    | 20 965,5  | 23 523,3  | 23 099,9  | 23 908,4  | 25 462,4  | 26 430,0  | 27 487,2  | 28 999,0  | 31 376,9  |
| Псковская область       | 16 178,9  | 16 211,3  | 17 021,8  | 17 532,5  | 18 619,5  | 18 675,3  | 19 590,4  | 20 687,5  | 21 328,8  |
| г. Санкт-Петербург      | 188 243,0 | 196 902,2 | 231 360,1 | 251 025,7 | 268 848,5 | 291 162,9 | 315 329,4 | 356 637,6 | 389 804,9 |

Источник: расчёты авторов по данным сайта Федеральной службы государственной статистики и сборника «Регионы России. 2009», для пересчёта использован индекс физического объёма ВРП.

Фактическое конечное потребление домашних хозяйств (X), значение показателя за год в ценах 2000 года, миллионов рублей

| Регион                  | 2000 г.   | 2001 г.   | 2002 г.   | 2003 г.   | 2004 г.   | 2005 г.   | 2006 г.   | 2007 г.   | 2008 г.   |
|-------------------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Республика Карелия      | 15 931,6  | 17 197,1  | 19 858,5  | 20 799,4  | 23 200,9  | 25 306,4  | 29 259,7  | 29 729,7  | 32 247,4  |
| Республика Коми         | 28 946,2  | 36 813,2  | 40 196,9  | 41 076,4  | 46 373,0  | 50 416,9  | 55 666,6  | 58 917,6  | 60 274,5  |
| Архангельская область   | 28 474,7  | 33 654,6  | 36 224,0  | 38 923,0  | 43 223,3  | 48 845,3  | 54 129,0  | 59 706,9  | 65 862,1  |
| Вологодская область     | 26 342,0  | 29 364,2  | 31 820,2  | 32 944,5  | 36 112,0  | 39 485,1  | 45 039,8  | 48 422,7  | 51 237,2  |
| Калининградская область | 20 494,9  | 19 389,5  | 22 469,4  | 23 344,7  | 25 385,7  | 29 557,2  | 36 204,4  | 41 987,3  | 45 621,2  |
| Ленинградская область   | 26 652,0  | 30 607,8  | 33 594,1  | 35 231,9  | 43 298,5  | 52 749,7  | 59 541,8  | 64 886,4  | 68 104,7  |
| Мурманская область      | 29 473,5  | 30 449,0  | 31 795,8  | 33 518,7  | 35 870,1  | 40 146,2  | 43 907,2  | 46 975,2  | 51 421,4  |
| Новгородская область    | 14 334,1  | 15 113,3  | 16 593,9  | 16 656,3  | 17 973,1  | 19 848,0  | 22 646,8  | 25 117,1  | 29 084,4  |
| Псковская область       | 12 839,1  | 14 073,4  | 17 198,5  | 19 591,5  | 22 516,6  | 24 141,1  | 27 632,7  | 27 065,5  | 30 544,0  |
| г. Санкт-Петербург      | 137 217,3 | 154 599,3 | 173 919,8 | 187 756,0 | 221 397,3 | 269 592,0 | 302 711,6 | 339 657,6 | 375 441,6 |

Источник: расчёты авторов по данным сайта Федеральной службы государственной статистики и сборника «Регионы России. 2009», для пересчёта использован индекс потребительских цен.

Фонд заработной платы, начисленной работникам списочного состава и внешним совместителям (S), значение показателя за год в ценах 2000 года, миллионов рублей

| Регион                  | 2000 г.  | 2001 г.  | 2002 г.  | 2003 г.  | 2004 г.   | 2005 г.   | 2006 г.   | 2007 г.   | 2008 г.   |
|-------------------------|----------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Республика Карелия      | 9 023,7  | 9 908,1  | 11 810,4 | 12 601,7 | 13 811,5  | 15 593,1  | 17 479,9  | 19 734,8  | 19 576,9  |
| Республика Коми         | 17 941,0 | 21 080,6 | 22 999,0 | 24 033,9 | 25 476,0  | 27 998,1  | 30 853,9  | 33 970,1  | 33 970,1  |
| Архангельская область   | 15 557,3 | 18 139,8 | 20 770,1 | 23 013,3 | 25 982,0  | 29 047,9  | 31 633,1  | 35 239,3  | 34 428,8  |
| Вологодская область     | 15 712,4 | 18 226,4 | 20 377,1 | 22 068,4 | 25 202,1  | 28 327,2  | 30 905,0  | 34 211,8  | 33 698,6  |
| Калининградская область | 6 276,2  | 7 631,8  | 9 539,8  | 10 675,0 | 11 198,1  | 12 138,7  | 16 108,1  | 19 313,6  | 21 380,1  |
| Ленинградская область   | 14 458,3 | 17 451,1 | 20 958,8 | 22 216,3 | 24 082,5  | 26 803,8  | 28 948,1  | 34 129,9  | 31 263,0  |
| Мурманская область      | 15 980,6 | 18 281,8 | 20 274,5 | 20 578,6 | 21 566,4  | 23 615,2  | 26 401,8  | 29 543,6  | 29 514,1  |
| Новгородская область    | 5 196,2  | 6 116,0  | 7 351,4  | 8 218,8  | 9 131,1   | 10 190,3  | 11 841,2  | 13 427,9  | 13 750,2  |
| Псковская область       | 4 444,5  | 5 253,4  | 6 440,7  | 7 393,9  | 7 992,8   | 9 031,9   | 9 944,1   | 11 813,6  | 10 951,2  |
| г. Санкт-Петербург      | 59 776,9 | 71 672,5 | 91 167,4 | 95 543,5 | 105 862,1 | 118 353,9 | 138 829,1 | 168 677,4 | 162 942,3 |

Источник: расчёты авторов по данным сайта Федеральной службы государственной статистики и сборника «Регионы России. 2009», для пересчёта использованы данные Росстата о реальной начисленной заработной плате в процентах к предыдущему году.

## Среднегодовая численность занятых в экономике (L), тысяч человек

| Регион                  | 2000 г. | 2001 г. | 2002 г. | 2003 г. | 2004 г. | 2005 г. | 2006 г. | 2007 г. | 2008 г. |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Республика Карелия      | 343,1   | 338,6   | 342,9   | 353,1   | 351,7   | 349     | 352,5   | 353,7   | 350,4   |
| Республика Коми         | 459,9   | 466,4   | 463,9   | 468,9   | 473,5   | 474,9   | 475,4   | 476,1   | 475,4   |
| Архангельская область   | 594,4   | 601,3   | 609     | 609,7   | 600,4   | 601,5   | 618,9   | 621,4   | 615,1   |
| Вологодская область     | 622,6   | 623     | 623,9   | 619,2   | 600,4   | 605,7   | 610,4   | 613,7   | 611,3   |
| Калининградская область | 413,2   | 409,1   | 414     | 422,7   | 440,1   | 446,8   | 464,8   | 475,9   | 475,8   |
| Ленинградская область   | 710,6   | 715,8   | 718,3   | 725,3   | 733,6   | 736,6   | 743,4   | 748,7   | 743,6   |
| Мурманская область      | 432,9   | 433,5   | 436,8   | 440,6   | 446     | 445,8   | 445,8   | 444     | 442,9   |
| Новгородская область    | 318,1   | 316,3   | 315     | 313,8   | 314,9   | 313,9   | 310,5   | 313,6   | 316,3   |
| Псковская область       | 331,1   | 327,5   | 323,8   | 326,5   | 338,7   | 336,6   | 334,3   | 333,9   | 332,6   |
| г. Санкт-Петербург      | 2 383,7 | 2 397,2 | 2 412   | 2 410,2 | 2 414,5 | 2 427   | 2 445,2 | 2 473,4 | 2 472,1 |

Источник: Регионы России. 2009. – С. 106.

## Численность безработных (B), тысяч человек

| Регион                  | 2000 г. | 2001 г. | 2002 г. | 2003 г. | 2004 г. | 2005 г. | 2006 г. | 2007 г. | 2008 г. |
|-------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| Республика Карелия      | 43      | 33      | 30      | 32      | 28      | 33      | 14      | 24      | 32      |
| Республика Коми         | 66      | 76      | 49      | 65      | 66      | 63      | 68      | 55      | 42      |
| Архангельская область   | 90      | 61      | 58      | 70      | 50      | 38      | 41      | 39      | 48      |
| Вологодская область     | 55      | 59      | 40      | 30      | 40      | 34      | 35      | 27      | 39      |
| Калининградская область | 77      | 39      | 35      | 38      | 33      | 34      | 23      | 18      | 47      |
| Ленинградская область   | 82      | 62      | 59      | 76      | 61      | 66      | 53      | 37      | 55      |
| Мурманская область      | 73      | 69      | 55      | 53      | 56      | 46      | 35      | 33      | 36      |
| Новгородская область    | 28      | 23      | 22      | 18      | 21      | 20      | 19      | 18      | 17      |
| Псковская область       | 43      | 37      | 28      | 29      | 21      | 25      | 27      | 18      | 25      |
| г. Санкт-Петербург      | 153     | 98      | 86      | 105     | 69      | 55      | 63      | 56      | 55      |

Источник: Регионы России. 2009. – С. 130.