На правах рукописи

УРЕНЦОВ Олег Вячеславович

СВОЙСТВА ФОНДОВЫХ ИНДЕКСОВ И ГИПОТЕЗА ЭФФЕКТИВНОГО РЫНКА (ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЙ ПОДХОД)

Специальность 08.00.13 –

«Математические и инструментальные методы экономики»

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата экономических наук

Москва – 2009

Работа выполнена в Учреждении Российской Академии Наук
Институт Системного Анализа РАН,
лаборатория 7-1. Системный анализ эффективности естественных монополий

Научный руководитель:	доктор экономических наук, профессор Костюк Владимир Николаевич
Официальные оппоненты:	доктор экономических наук, профессор Седелев Борис Владимирович
	кандидат экономических наук, доцент Валиуллин Хасан Хафизович
Ведущая организация:	Российский университет дружбы народов (экономический факультет)

Защита состоится «21» декабря 2009 года в 11.00 часов на заседании Диссертационного совета Д.002.086.01 в Учреждении Российской Академии наук Институт Системного Анализа РАН по адресу: 117312, Москва, проспект 60-летия Октября, 9, ауд. 1206.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института Системного Анализа РАН.

Автореферат разослан «20» ноября 2009 г.

Ученый секретарь
Диссертационного совета,
кандидат экономических наук В.Н.Рысина

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ.

Актуальность исследования.

В современной экономике значительную роль играют финансовые рынки. Функционирование этих рынков характеризуется различными режимами поведения, от спокойного и стабильного до весьма бурного (кризисного) и нестабильного. В начале нынешнего века кризисные явления в финансовом секторе экономики стали типичными. Они бросают вызов современной финансовой теории, ориентированной в основном на спокойное и стабильное поведение финансовых рынков.

Существующая в настоящее время теория финансов содержит гипотезу эффективного рынка как одну из составляющих. Сущность этой гипотезы заключается в том, что приращения цен считаются независимыми. Распространено также представление процесса изменения цен как стационарного процесса с нормальной функцией распределения. Иначе говоря, фактически моделью эффективно функционирующего рынка является броуновское движение.

Однако реальность регулярно демонстрирует такие свойства, которые не могут быть полностью описаны в рамках гипотезы эффективного рынка. Примерами необычных явлений, с точки зрения этой гипотезы, являются кризисы, когда цены активов за короткое время испытывают значительное падение. С точки зрения гипотезы эффективного рынка необъяснимо и возникновение трендов, которые позволяют участникам фондового рынка получать прибыль. Нестационарность поведения цен также не согласуется с гипотезой эффективного рынка. Для объяснения подобных явлений, по всей видимости, следует внести коррективы в удобную и понятную модель эффективного рынка

В данной работе проводятся детальные инструментальные исследования реальных свойств фондовых индексов. Они показывают неполное соответствие их поведения положениям гипотезы эффективного рынка. Полученные в результате этих исследований новые знания могут помочь модификации гипотезы, эффективного рынка и приблизиться к созданию удовлетворительной теории финансовых кризисов.

Степень разработанности проблемы.

Первые шаги в изучении фондового рынка были сделаны Луи Башелье в его работе 1900 года под названием «Теория спекуляций». В результате исследований поведения рыночных котировок он пришел к выводу о том, что их абсолютные приращения подчиняются броуновскому движению.

Однако впоследствии, когда в распоряжении исследователей появились достаточно длинные ряды данных, было замечено, что абсолютные значения приращений цен пропорциональны значениям самих цен. Это привело к изменению способа их исследования. Более целесообразным стало считаться изучение либо относительных приращений цен, либо изучение приращений логарифмов цен. Эти подходы достаточно близки друг к другу при малых значениях относительных приращений, что практически позволяет их отождествить для случая фондовых индексов.

В этой связи, прежде всего, следует упомянуть работу М. Кендалла, относящуюся к 50-м годам. Кендалл не обнаружил в последовательности *приращений логарифмов цен каких-либо циклов, ритмов и прочих* детерминистических закономерностей. В качестве модели, которая могла бы удовлетворительно описывать движение приращений логарифмов цен, он выбрал случайное блуждание. Можно сказать, что Кендалл поддержал точку зрения Башелье, поскольку их подходы аналогичны на временных отрезках, где цена изменяется мало.

Работа Кендалла подготовила почву для появления в середине 60-х годов гипотезы эффективного рынка, автором которой является Юджин Фама. Основной идеей этой гипотезы является представление последовательности доходностей индекса броуновским движением.

После появления гипотезы эффективного рынка начался довольно длительный период ее проверки различными исследователями.

Результатами такой проверки оказались обнаружение отклонения функции распределения от нормального поведения, нестационарность случайного процесса изменения цен и обнаружение наличия памяти в этом процессе.

Большинство ученых, занимающихся вопросом функциональной зависимости, описывающей реальную функцию распределения, сходятся на том, что оно должно быть предельным распределением суммы большого числа случайных элементарных воздействий. В пользу этого свидетельствует тот факт, что итоговая цена акции на момент закрытия биржи является результатом большого числа изменений, произошедших в течение торгового дня.

Как известно, нормальное распределение удовлетворяет этому признаку, но поскольку, как было установлено, реальная функция распределения доходностей значительно отличается от нее, то необходимы были какие-то другие варианты. В качестве других вариантов Бенуа Мандельброт предложил рассмотреть класс устойчивых по Леви вероятностных распределений, потому что они являются предельными распределениями для суммы независимых одинаково распределенных величин. Более низкие максимумы устойчивых распределений и более тяжелые их хвосты были желательными свойствами, объяснявшими наличие достаточно большого количества экстремальных событий, которые не объясняются нормальным распределением.

Однако гипотеза устойчивых распределений не получила всеобщего признания. Отчасти это произошло по вине одного свойства, характерного для всех устойчивых распределений. Это свойство заключается в бесконечном значении их дисперсии, которое, как считают многие, не должно быть характерно для реальных процессов.

Вместе с тем благодаря устойчивым распределениям удалось обратить внимание на некоторые свойства реальной функции распределения. Дело в том, что хвосты устойчивых распределений имеют асимптотически степенное поведение, поэтому одним из признаков соответствия реального распределения устойчивому распределению является степенное поведение хвостов первого. Причем для устойчивых распределений коэффициент, определяющий степенное убывание должен определяться условием $0<\alpha<2$, иначе такой коэффициент еще называется индексом устойчивости.

Изучение поведения хвоста реального распределения привело к формированию устойчивого мнения, что оно действительно является степенным. Но поскольку степенное поведение хвоста наблюдается не только у устойчивых распределений, то для описания класса всех распределений со степенными хвостами стал использоваться термин «распределения типа Парето», в честь наиболее известного распределения с обозначенными свойствами.

Помимо вопроса о функциональной зависимости функции распределения, изучался также вопрос о наличии памяти в последовательности суточных доходностей. Под наличием памяти понимается наличие зависимости между временными сечениями процесса. Говорят, что случайный процесс не имеет памяти, если его временные срезы являются независимыми случайными величинами.

Для иллюстрации наличия памяти в случайном процессе часто используется R/S-анализ. Метод R/S-анализа основан на построении графика специальной R/S-статистики в зависимости от времени. Как заметил Г. Херст в своих исследованиях поведения уровня вод реки Нил, R/S-статистика пропорциональна времени в степени $0<H<1$, где H носит название показателя Херста. В. Феллер было показал, что для последовательности независимых случайных величин $H=\frac{1}{2}$. Для величин с положительной взаимосвязью $H>\frac{1}{2}$, для величин с отрицательной взаимосвязью $H<\frac{1}{2}$.

Выяснилось, что для поведения фондовых индексов H немного больше $\frac{1}{2}$, то есть имеется слабая положительная зависимость в последовательности доходностей.

Хотя описанные выше достижения содержат важную информацию о поведении индекса, все еще остаются неразрешенные вопросы.

Например, нет устоявшегося мнения о функциональной зависимости в центральной части распределения, хотя информация об этом представляется важной, поскольку подавляющее большинство колебаний индекса приходятся на эту область.

Вопрос о наличии памяти в процессе страдает наличием некой неопределенности, поскольку демонстрация наличия слабой положительной зависимости в последовательности суточных доходностей с помощью R/S-статистики представляется недостаточно убедительной из-за малости отличия показателя Херста от 0,5. Эти сомнения усугубляются тем, что автокорреляционная функция последовательности суточных доходностей практически равна нулю.

Хотя нестационарность последовательности суточных доходностей широко известна, не было произведено попыток учета этой нестационарности и исследования различных режимов функционирования индекса.

Цель и задачи исследования.

Целями данного исследования являются изучение поведения фондовых индексов, сравнение выявленных свойств с положениями гипотезы эффективного рынка, попытка уточнения ее математической модели и использование статистических свойств фондовых индексов для раннего выявления кризисных явлений.

Достижение поставленных целей требует решения следующего перечня задач:

1. Изучение функции распределения суточных доходностей индексов.

2. Изучение наличия памяти в последовательности доходностей индексов.

3. Разделение и изучение режимов поведения последовательности доходностей индексов.

4. Поиск возможности использования полученных результатов для раннего обнаружения кризисных явлений.

Предмет и объект исследования.

Объектами данного исследования являются фондовые индексы.

Предметом изучения являются их статистические свойства.

Методологическая, теоретическая и эмпирическая база исследования.

Методологическая база.

В работе используются понятия и методы математической статистики: понятие статистического распределения, методы проверки статистических гипотез (квантильный метод, критерий Пирсона), понятие и свойства коэффициента корреляции и автокорреляционной функции, свойства дисперсии суммы случайных величин.

Теоретическая база.

Исследование проведено в рамках парадигмы неклассического поведения фондовых индексов. В свете этой парадигмы движение индекса не является стационарным, определяется негауссовской функцией распределения и имеет память.

Первые работы, посвященные изучению поведения цен акций, утверждали броуновское движение абсолютных приращений. Дальнейшее накопление рядов данных привело к некоторому изменению взгляда на проблему. Появились работы, утверждающие случайное блуждание приращений логарифмов индексов.

Современные наиболее фундаментальные подходы и теории, принятые в научном сообществе: гипотеза эффективного рынка, гипотеза устойчивых распределений.

Эмпирическая база.

Имеющиеся ряды значений индексов DJIA, S&P500, NASDAQ, CAC40 с интервалом в один день. Использовались значения на момент закрытия бирж.

Научные результаты, выносимые на защиту.

1. В современной финансовой теории считается, что функция распределения доходностей фондового индекса является нормальной (гауссовой). В настоящей работе показывается, что такое представление не в полной мере соответствует действительности. В частности, обнаружено, что в центральной части распределение определяется *экспоненциальной* зависимостью, а хвосты распределения имеют тенденцию к степенному убыванию.

2. Современная финансовая теория основана в предположении справедливости гипотезы эффективного рынка, которая заключается в том, что цены в любой момент времени отражают всю имеющуюся информацию. Математически это выражается в том, что последовательность доходностей индекса является последовательностью независимых случайных величин, то есть процессом без памяти.

В научной литературе имеются работы, свидетельствующие об обратном. Однако статистические методы, использующиеся для демонстрации наличия зависимости, обычно не достаточно уверенно показывают наличие памяти. Это может привести к заблуждению, что эффект памяти незначителен и им можно пренебречь.

В настоящей работе удалось убедительно показать, что между доходностями индекса, соответствующими разным временным интервалам, имеется *достаточно сильная положительная связь*. Для этого вместо последовательности доходностей индекса следует исследовать последовательность *модулей* доходностей. Этот метод дает более уверенный результат, потому что память преимущественно выражается в группировке/кластеризации больших по амплитуде разнонаправленных изменений индекса, при этом направление колебаний остается достаточно бессистемным.

3. Гипотеза эффективного рынка полагает, что случайный процесс изменений индекса является стационарным. Однако даже простой взгляд на график последовательности доходностей индекса позволяет обнаружить, по крайней мере, два различных режима его функционирования.

В диссертации приведен пример алгоритма, позволяющий разделить два режима функционирования индекса. Работа алгоритма разделения режимов основана на их отличительных особенностях. Первый режим (спокойный) характеризуется малыми значениями модулей доходностей и является обычным режимом поведения индекса, а второй (бурный) – наличием больших значений модулей доходностей и является сравнительно редким явлением.

В работе проведено изучение статистических свойств каждого из режимов, которые оказались в общем различными.

Наиболее интересными являются следующие результаты.

Во-первых, обнаружено, что рост индекса характерен только для спокойного режима, а для неспокойного режима характерно либо падение, либо колебание около определенного уровня.

Во-вторых, было выявлено, что память имеется в обоих режимах функционирования индекса. Данный факт отличается от широко распространенного мнения, что в спокойном режиме функционирования памяти нет, и справедлива гипотеза эффективного рынка.

В-третьих, было обнаружено, что в периоды спокойного поведения доходности индекса целиком подчиняются экспоненциальному распределению.

4. В результате сравнения графика зависимости доходностей от времени и модифицированного специальным образом графика значений индекса от времени было найдено соответствие между моментами наиболее быстрого падения индекса и моментами с наибольшими значениями модулей доходностей. Иначе говоря, падение индекса сопровождается ростом

амплитуды колебаний доходностей, кризисным периодам соответствуют периоды бурного поведения индекса.

Данное свойство можно использовать для *раннего обнаружения* начала кризиса. Для этого предлагается использовать алгоритм разделения режимов поведения индекса.

Идея заключается в том, чтобы с помощью этого алгоритма анализировать поступающие данные о фондовом индексе. Обнаружение алгоритмом смены режима поведения со спокойного на бурный означает начало кризисного периода.

Следует четко оговорить, что данный метод не прогнозирует начало кризиса, но использует *сопутствующие признаки* для его идентификации.

5. Многие положения современной теории финансов основываются на том факте, что доходности акций имеют нормальную функцию распределения.

Данная работа выявляет иную закономерность, но принципиально допускает применение нормальной функции распределения на участках спокойного поведения индекса из-за схожести свойств нормального и экспоненциального распределения (у них существуют моменты всех порядков). Вместе с тем существуют периоды, когда нормальное распределение должно быть заменено распределением со степенными хвостами (типа Парето). Для таких случаев некоторые положения финансовой теории требуют пересмотра.

6. В научной литературе положения гипотезы эффективного рынка обычно излагаются на двух разных смысловых уровнях. Первый из них несет в себе идею понятия эффективного рынка, а второй - ее математическое содержание. Понятие эффективного рынка заключается в отражении всей имеющейся информации в ценах, а значит в невозможности создания более точного прогноза завтрашнего значения цены, чем сегодняшнее ее значение. В качестве математической модели эффективного рынка приводится броуновское движение или более общая модель случайного блуждания.

При выявлении расхождений с действительностью на первом смысловом уровне потребовался бы отказ от гипотезы эффективного рынка и замена ее иным понятием, содержащим элементы, противоположные по смыслу изначальной гипотезе. Если бы расхождения были выявлены только на втором смысловом уровне, а справедливость первого смыслового уровня в каком-то смысле сохранялась, то потребовалось бы внести изменения только в математическую модель.

Результаты исследований указывают именно на последний вариант. А именно выясняется, что представление процесса изменения индекса случайным блужданием не может выразить важные его свойства.

Более подходящей моделью последовательности доходностей является *слабо субмартингальный случайный процесс с эффектом кластеризации больших по модулю доходностей и с функцией распределения со степенными хвостами и экспоненциальной центральной частью*. Под слабой субмартингальностью здесь понимается тот факт, что математическое ожидание доходности в заданный момент времени имеет малую положительную величину, что приводит к в среднем очень медленному росту индекса.

Научная новизна результатов исследования.

Новизна результатов исследования по сравнению с предшественниками заключается в уточнении свойств поведения фондовых индексов и уточнения математической модели гипотезы эффективного рынка.

В частности, уточнены свойства функции распределения доходностей индекса, относящиеся к центральной части распределения.

Предложен метод, который в отличие от других методов достаточно явно показывает наличие зависимости (памяти) в последовательности доходностей индекса.

Изучены статистические свойства индекса в двух режимах его поведения. При этом обнаружены новые закономерности.

Предложен метод раннего обнаружения кризисных явлений, основанный на приведенном в диссертации алгоритме разделения режимов поведения индекса.

Проведена попытка уточнения гипотезы эффективного рынка с учетом выявленных в поведении индекса закономерностей.

Теоретическая и практическая значимость работы.

Теоретическая значимость работы заключается в иллюстрации наличия несоответствий между статистическими свойствами фондовых индексов и классической теорией финансов, базирующейся, в частности, на гипотезе эффективного рынка. Предложено изменение ее математической модели.

Практическая значимость работы определяется предложением алгоритма раннего оповещения о начале кризиса, который может использоваться для повышения эффективности реагирования.

Объем и структура работы.

Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения общим объемом 110 страниц и библиографического списка использованной литературы из 115 наименований.

II. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ ДИССЕРТАЦИИ.

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ФОНДОВОГО ИНДЕКСА.

1. Проверка применимости нормального распределения.

В данной работе для проверки справедливости статистических гипотез предпочтение отдается графическим методам. Графические методы, в отличие от формальных методов проверки гипотез, основанных на подсчете выборочных значений статистик, отличаются наглядностью и простотой, не противореча им при этом.

Согласно этому подходу, чтобы проверить, насколько достоверно распределение выборки доходностей $r_t = \frac{p_{t+1} - p_t}{p_t}$, где p_t - значение индекса в t-

ый момент наблюдения, может быть описано нормальным распределением, нужно интервальное статистическое распределение частот изобразить в координатах $(r^2, \ln[p(r)])$, где r - значение доходности, соответствующей середине интервала, а $p(r)$ - соответствующее значение вероятностной частоты.

Причина выбора соответствующих координат определяется функциональной зависимостью нормального распределения. В самом деле, в выбранных координатах плотность нормальной функции распределения является линейной функцией. Этот факт предоставляет наглядную возможность проверки нормальности распределения доходностей.

График 1.

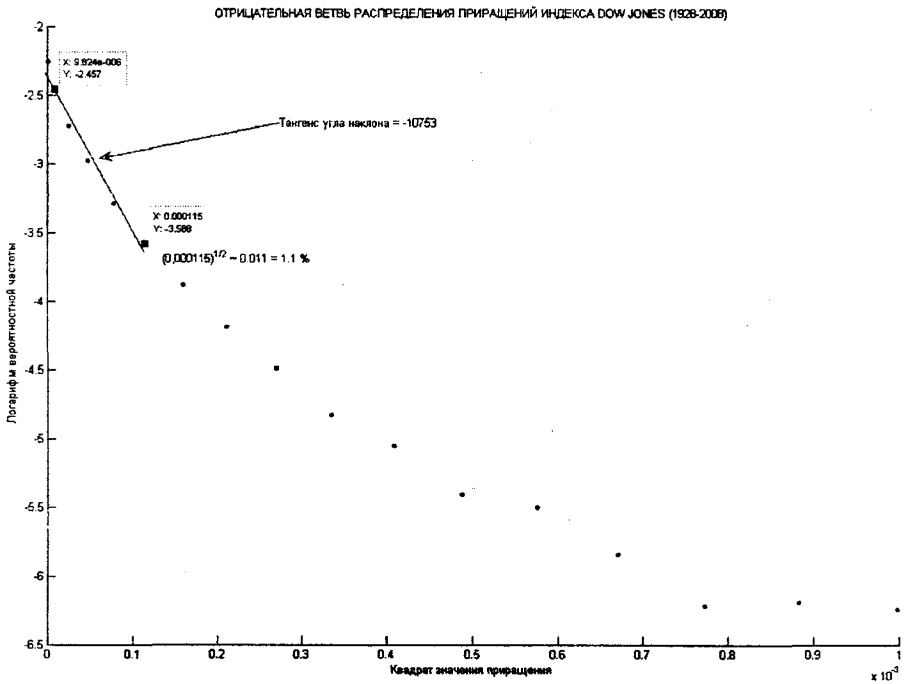
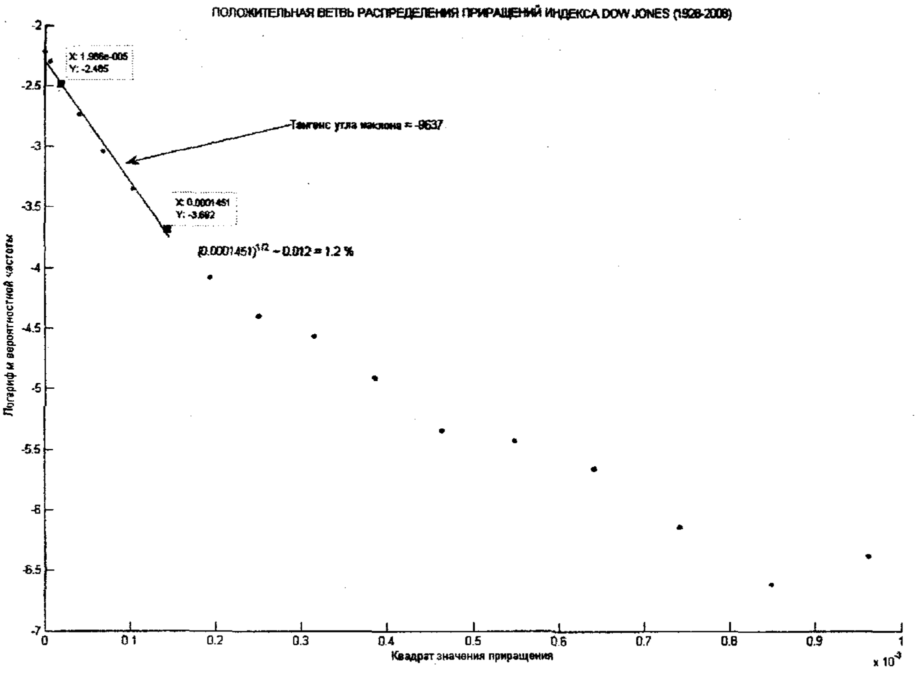


График 2.



На графиках 1 и 2 изображены отрицательная и положительная ветви интервального статистического распределения частот.

Видно, что точки изображенной зависимости не ложатся на прямую, что свидетельствует об отличии функции распределения выборки доходностей от функции нормального распределения. Линейной аппроксимации поддаются лишь точки в левой части графиков. Значит, границы допустимости нормального представления в исходных координатах ограничиваются интервалом $(-1{,}1\%;1{,}2\%)$.

Построенные графики также демонстрируют, что реальная функция распределения доходностей имеет более тяжелый хвост по сравнению с нормальной функцией распределения.

2. Степенное поведение хвоста распределения.

Чтобы определить наличие степенного поведения хвоста распределения выборки доходностей r_t, или иначе говоря, принадлежность распределения к классу распределений типа Парето, также используется графический метод. Для этого необходимо интервальное статистическое распределение частот изобразить в координатах $(\ln(r), \ln[p(r)])$, где r - значение доходности, соответствующей середине интервала, а $p(r)$ - соответствующее значение вероятностной частоты.

График 3.

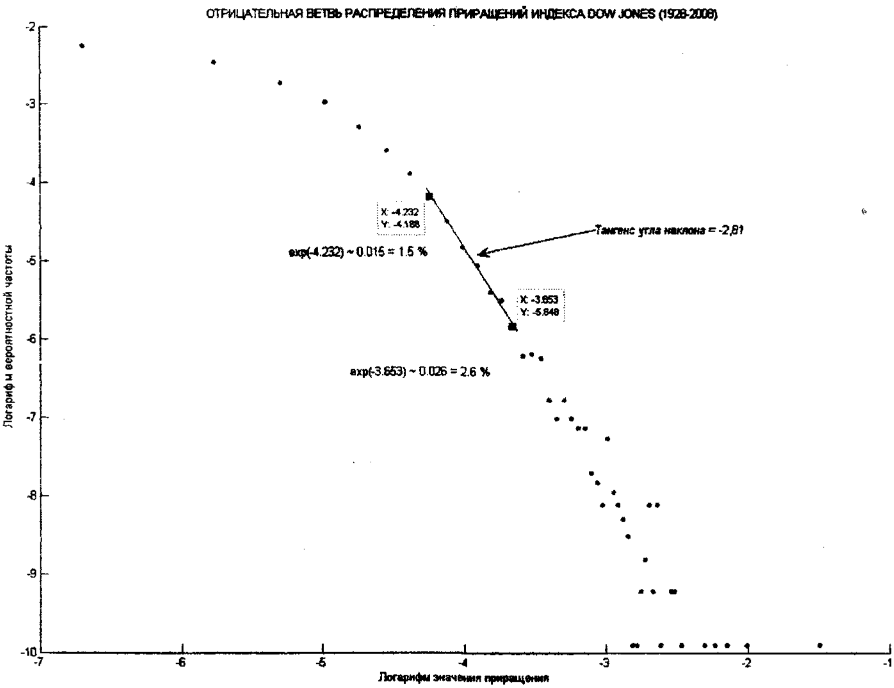
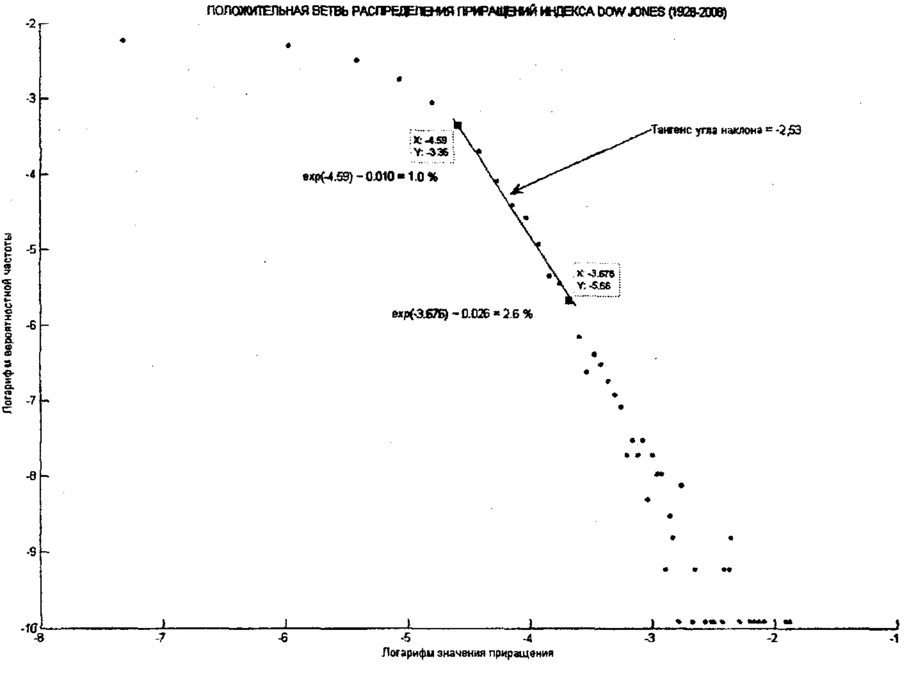


График 4.



Как и в предыдущем случае, выбор данного координатного представления связан с наглядностью представления в нем степенной функции, которая приобретает вид прямой. На графиках 3 и 4 изображены отрицательная и положительная ветви интервального статистического распределения частот.

Легко заметить, что правые части изображенных зависимостей имеют тенденцию к «спрямлению», что соответствует идентификации степенной зависимости. Однако следует обратить внимание на тот факт, что частоты, соответствующие в исходных координатах доходностям, по модулю превосходящим приблизительно 2,6 %, теряют статистическую стабильность из-за недостатка статистического материала, и при движении вправо намечавшаяся функциональная зависимость начинает размываться.

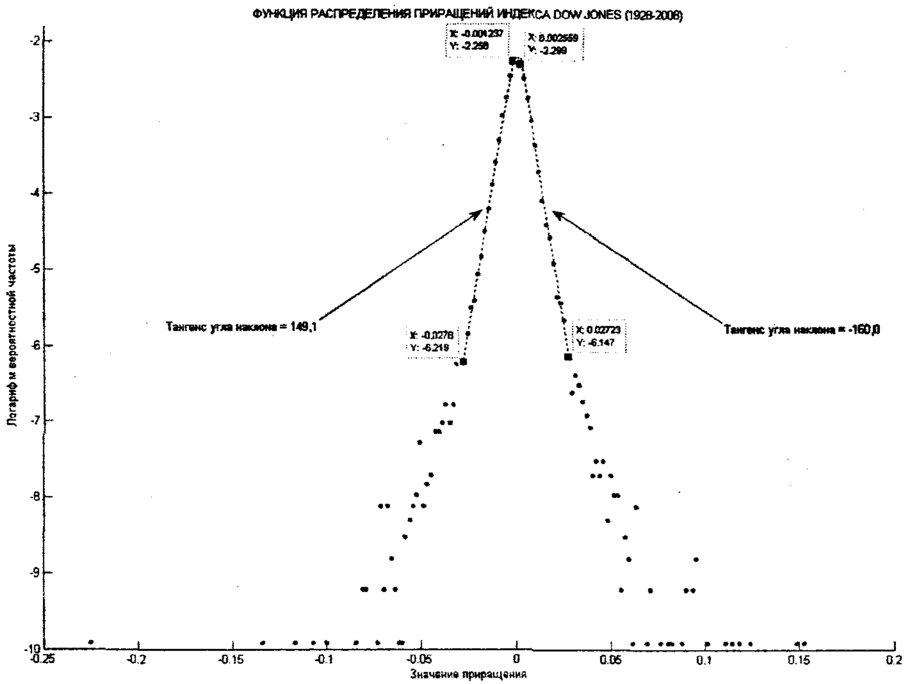
Тем не менее, существуют участки со сформировавшейся линейной зависимостью. В исходных координатах им соответствуют интервалы $(-2{,}6\%;-1{,}5\%)$ и $(1{,}0\%;2{,}6\%)$ на оси доходности. Соответствующие степенные показатели равны $\alpha_{отр} = -1{,}81$ и $\alpha_{пол} = -1{,}53$ для отрицательной и положительной ветвей соответственно. Они рассчитываются из тангенса угла наклона найденных линейных зависимостей к оси абсцисс. Прибавление единицы к тангенсу угла наклона дает искомую величину вследствие необходимости операции интегрирования.

3. Экспоненциальное поведение центральной части распределения.

В процессе исследования статистических свойств индексов была выявлена экспоненциальная зависимость в центральной части распределения доходностей.

Для наглядного обнаружения экспоненциальной зависимости нужно воспользоваться тем свойством, что логарифм от экспоненциальной функции является линейной функцией.

График 5.



Для реализации данного подхода предлагается интервальное статистическое распределение частот изобразить в координатах $(r, \ln[p(r)])$, где r - значение доходности, соответствующей середине интервала, а $p(r)$ - соответствующее значение частоты. На графике 5 можно видеть полученную зависимость.

Легко заметить, что в предложенном координатном представлении в центральной части распределения обнаруживаются два участка линейной зависимости. В исходных координатах эти участки соответствуют интервалам $(-2{,}7\%;0)$ и $(0;2{,}7\%)$.

Тангенсы углов наклона полученных линейных зависимостей к оси абсцисс равны соответственно $\lambda_1 = 149{,}1$ и $\lambda_2 = -160{,}0$. Они являются экспоненциальными коэффициентами в исходных координатах и представляют собой скорость изменения функции распределения.

Поскольку коэффициенты довольно близки друг к другу, то функцию распределения на интервале $(-2{,}7\%;2{,}7\%)$ можно приблизительно представить в виде $p(r) \approx A \cdot \exp\left(-\hat{\lambda}|r|\right)$, где A - значение плотности вероятности в точке 0, $\hat{\lambda}$ - некоторая оценка экспоненциального коэффициента.

ПРОБЛЕМА НАЛИЧИЯ ПАМЯТИ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ДОХОДНОСТЕЙ ФОНДОВОГО ИНДЕКСА.

1. Статистические методы не определяют наличие памяти в последовательности доходностей индекса r_t.

Автокорреляционная функция последовательности доходностей индекса.

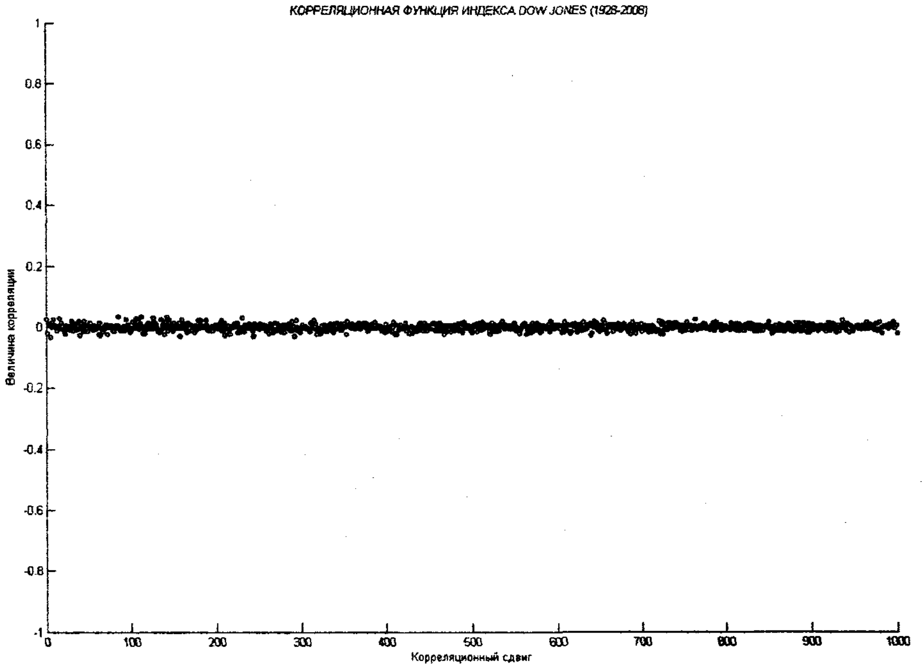
Из теории вероятностей известно, что ковариация, а стало быть, и коэффициент корреляции двух независимых случайных величин имеют нулевое значение. Известно также, что обратное неверно, то есть из равенства нулю корреляции двух случайных величин не следует их независимость. Но если коэффициент корреляции отличается от нуля, то это обязательно означает, что случайные величины являются зависимыми.

На использовании перечисленных свойств коэффициента корреляции основаны также выборочные методы определения зависимости в стационарной последовательности случайных величин.

В качестве индикатора зависимости двух случайных величин, представленных выборками $\{X_1, X_2, \ldots, X_N\}$ и $\{Y_1, Y_2, \ldots, Y_N\}$, используется выборочный коэффициент корреляции $r(X,Y) = \dfrac{\sum_{k=1}^{N}\left(X_k - \overline{X}\right)\cdot\left(Y_k - \overline{Y}\right)}{\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{N}\left(X_k - \overline{X}\right)^2\right)\cdot\left(\sum_{k=1}^{N}\left(Y_k - \overline{Y}\right)^2\right)}}$ или исправленный выборочный коэффициент корреляции $r'(X,Y)=\frac{N}{N-1}r(X,Y)$, который является несмещенной оценкой теоретического коэффициента корреляции в отличие от первого, являющегося лишь асимптотически несмещенной оценкой.

Для поиска зависимости внутри некой реализации $\{X_1, X_2, ..., X_N\}$ стационарного случайного процесса x_t, $t \in N$ используется автокорреляционная функция $F(t)=r(x_k, x_{k+t})$ (либо несмещенный ее вариант), k - произвольное фиксированное натуральное число. Если автокорреляционная функция отлична от нуля, то говорят о наличии корреляции между сечениями случайного процесса. Это фактически означает наличие у случайного процесса зависимости или, как иногда говорят, памяти.

График 6.



Проведенные исследования статистического материала показали отсутствие корреляции между доходностями r_t, где t - временной индекс. На графике 6 изображена автокорреляционная функция для индекса DJIA. Видно, что значение автокорреляционной функции равно нулю, а значит, отсутствует взаимосвязь между доходностями, соответствующими различным временным срезам.

Зависимость выборочного стандартного отклонения масштабированной выборки доходностей от коэффициента масштабирования.

Известно, что дисперсия суммы независимых случайных величин равна сумме их дисперсий. Тогда дисперсия независимых одинаково распределенных случайных величин растет пропорционально их количеству.

На этом свойстве основан еще один метод проверки наличия взаимосвязи между случайными величинами.

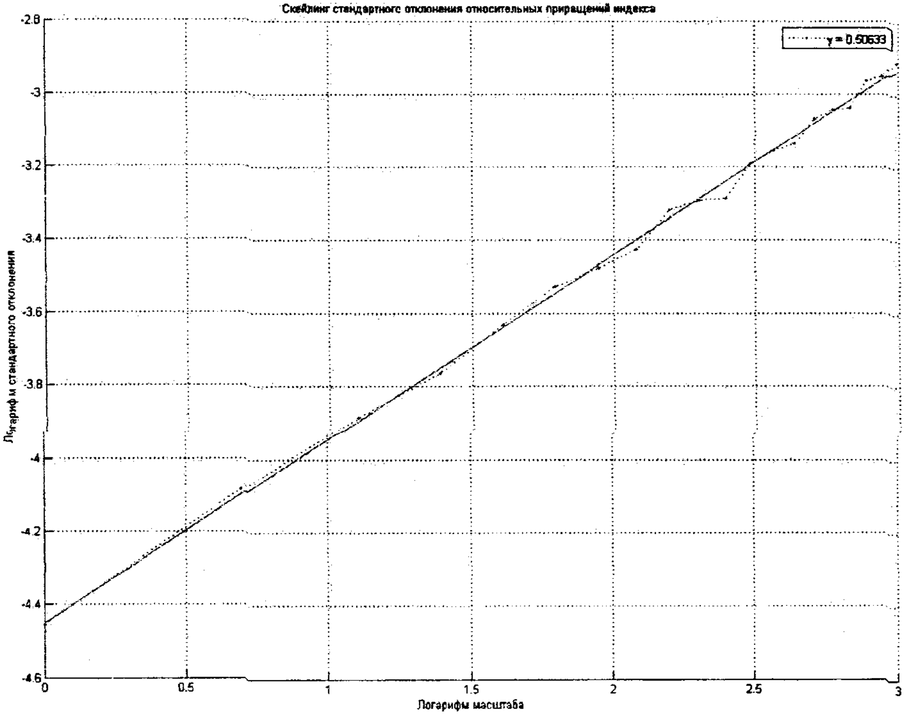
Пусть имеется простая выборка $\{X_1, X_2,..., X_N\}$. На основе нее сгенерируем выборки вида $\{X_1+...+X_k, X_{k+1}+...+X_{2k},..., X_{(m-1)k+1}+...+X_{mk}\}=\{X_{1,k}, X_{2,k},..., X_{m,k}\}$, где $m=\left[\frac{N}{k}\right]$, где $[x]$- целая часть x, $k=\overline{1,K}$, K - некое разумное натуральное число, обеспечивающее достаточную глубину полученной синтетической выборки.

В предположении стационарности исходного случайного процесса, полученные выборки представляют собой выборки сумм независимых и одинаково распределенных случайных величин. Поэтому они также являются простыми.

Исправленные выборочные дисперсии, построенные на этих выборках, должны давать оценку теоретической дисперсии суммы независимых и одинаково распределенных случайных величин. Это значит, что они должны расти пропорционально k. То есть $S^2(k)=\frac{\sum_{i=1}^{m}\left(X_{i,k}-\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}X_{i,k}\right)^2}{m-1}\approx k\cdot S^2(1)$, где $S^2(1)$ -

исправленная выборочная дисперсия для исходной выборки $\{X_1, X_2, ..., X_N\}$. В терминах исправленных выборочных стандартных отклонений выражение перепишется в следующем виде $S(k) \approx \sqrt{k} \cdot const = k^{\frac{1}{2}} \cdot const$, то есть исправленное выборочное стандартное отклонение должно расти пропорционально k в степени 0,5. Логарифмируя полученное выражение, находим $\ln S(k) \approx \frac{1}{2} \ln k + const$.

График 7.



На графике 7 изображена эта зависимость для имеющегося массива статистических данных. По построению показатель при переменной k оказался равен $\gamma = 0{,}506$, то есть почти равен 0,5. Из чего можно сделать вывод, что предложенный метод не выявил никакой разницы между временной последовательностью доходностей индекса и процессом с независимыми приращениями.

2. Наличие памяти обнаруживается в последовательности модулей доходностей индекса $|r_t|$.

Описанные выше методы показывают отсутствие какой-либо памяти в последовательности доходностей индекса, и указывают на то, что процесс изменения индекса можно причислить к процессам с независимыми приращениями. Но существует наглядный метод демонстрации обратного утверждения, описание которого приводится ниже.

Пусть даны две непрерывные независимые случайные величины ξ и η. Тогда $M(|\xi|\cdot|\eta|)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot|y|\cdot f_{\xi\eta}(x,y)dxdy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot|y|\cdot f_{\xi}(x)f_{\eta}(y)dxdy=$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}[|x|\cdot f_{\xi}(x)]\cdot[|y|\cdot f_{\eta}(y)]dxdy=\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|x|\cdot f_{\xi}(x)dx\right)\left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty}|y|\cdot f_{\eta}(y)dy\right)=$$

$$=M|\xi|\cdot M|\eta|.$$

Рассчитаем ковариацию их модулей, воспользовавшись предыдущим результатом, $\operatorname{cov}(|\xi|,|\eta|)=M[(|\xi|-M|\xi|)(|\eta|-M|\eta|)]=$

$$=M[|\xi|\cdot|\eta|-|\xi|M|\eta|-|\eta|M|\xi|+M|\xi|M|\eta|]=M[|\xi|\cdot|\eta|]-M|\xi|M|\eta|=0.$$

Это означает, что модули независимых случайных величин являются некоррелированными. Тогда из коррелированности модулей случайных величин следует зависимость этих случайных величин.

Предлагается вместо последовательности доходностей r_t индекса анализировать их абсолютные значения $|r_t|$, t - временной индекс.

В случае отсутствия памяти в исходной последовательности, она должна отсутствовать и в последовательности модулей.

График 8.

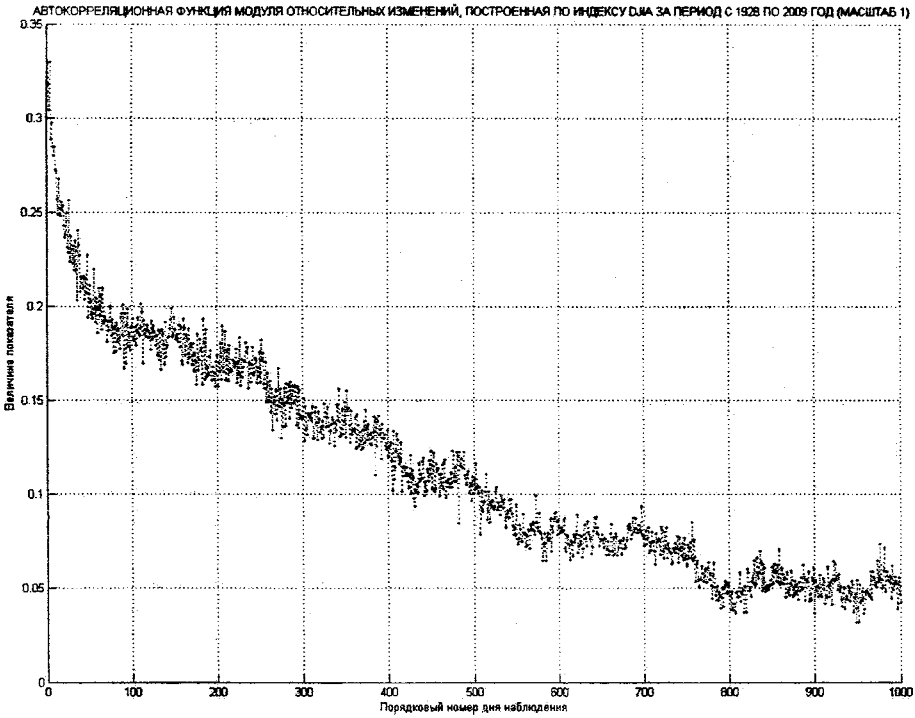
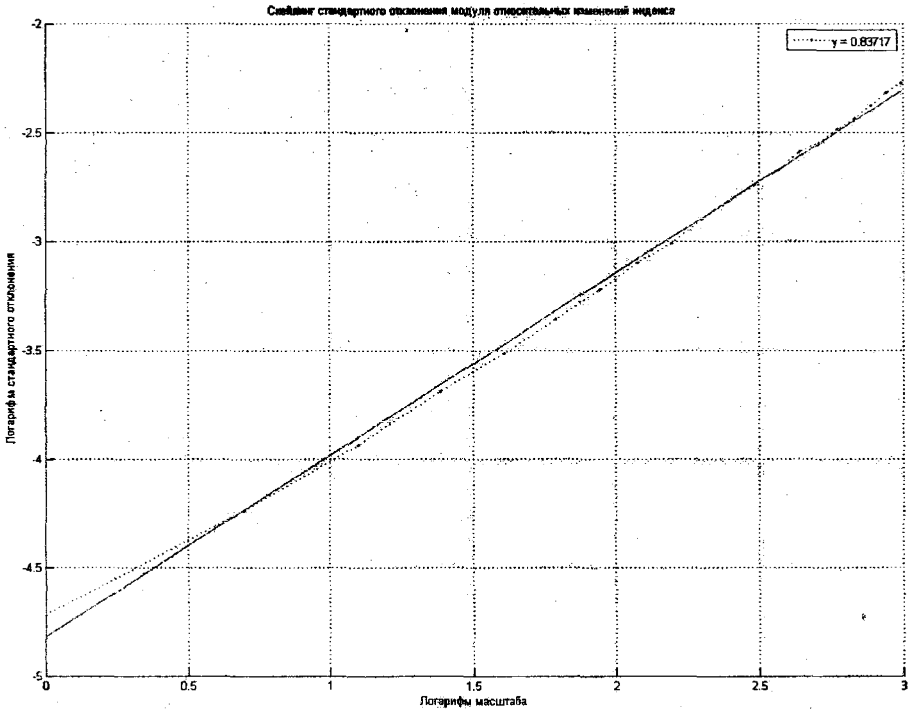

АВТОКОРРЕЛЯЦИОННАЯ ФУНКЦИЯ МОДУЛЯ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ИЗМЕНЕНИЙ, ПОСТРОЕННАЯ ПО ИНДЕКСУ DJIA ЗА ПЕРИОД С 1928 ПО 2009 ГОД (МАСШТАБ 1)
Величина показателя
Порядковый номер дня наблюдения
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
100
200
300
400
500
600
700
800
900
1000

График 9.



На графиках 8 и 9 изображены результаты проведенного анализа.

График автокорреляционной функции наглядно демонстрирует наличие памяти. Между близкими временными сечениями существует довольно ясная связь, что следует из довольно высокого значения коэффициента корреляции в левой части графика.

Стандартное отклонение суммы модулей доходностей растет пропорционально количеству слагаемых в степени $\gamma = 0.837$. Это также свидетельствует о наличии явной положительной взаимосвязи между модулями доходностей.

ВЫДЕЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЕ ДВУХ РЕЖИМОВ ПОВЕДЕНИЯ ФОНДОВОГО ИНДЕКСА.

1. Принцип разделения режимов. Пример возможного алгоритма.

При изучении финансовых индексов обращает на себя внимание нестационарность временной последовательности доходностей. В пользу этого свидетельствует тот факт, что наряду с периодами, на которых индекс ведет себя очень спокойно, существуют периоды очень бурного поведения. Поэтому с целью учета имеющейся нестационарности представляется разумным исследование статистических свойств индекса на двух различных режимах его функционирования, внутри которых предлагается подразумевать стационарность поведения индекса.

Однако прежде нужно разделить режимы поведения индекса. Для этого предлагается использовать алгоритм, чувствительный к амплитуде колебаний индекса. Это связано с тем, что бурные периоды характеризуются наличием высоких по абсолютной величине значений доходности, что визуально на графике выглядит, как всплеск.

Опишем здесь один из возможных алгоритмов.

Пусть $\{r_t\}_{t=1}^{N}$ - последовательность доходностей, где N - глубина имеющейся выборки. Выберем также некое натуральное число $W < N$ и вещественное число $\varepsilon > 0$, которые будут определять работу алгоритма.

Пусть сначала временной индекс $t = 1$.

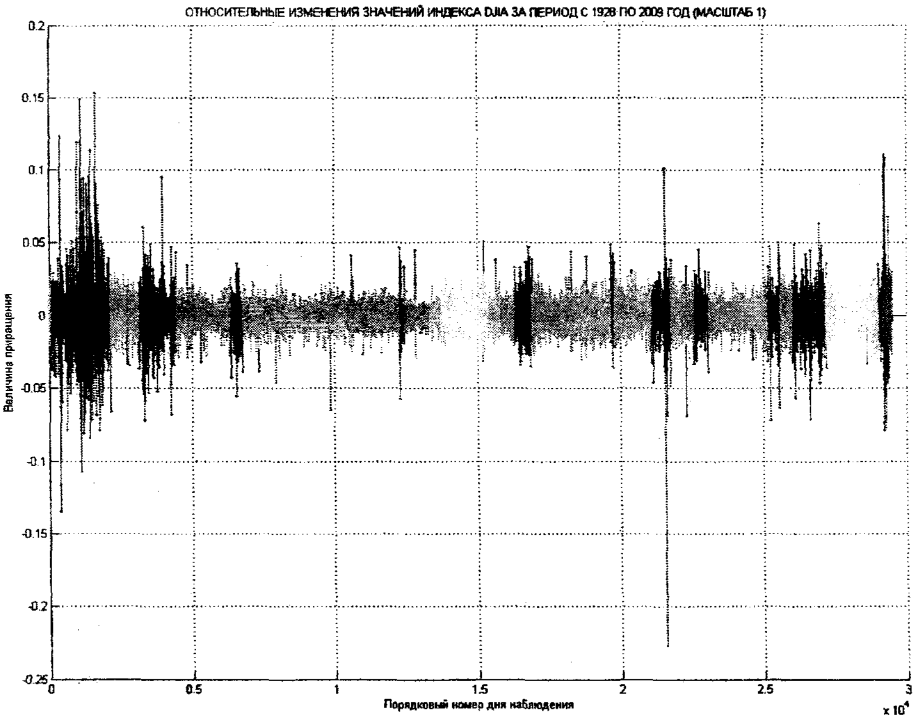
Если $|r_t| < \varepsilon$, то индекс t отнесем к множеству T_1 и перейдем к следующему значению временного индекса. Так будем продолжать, пока не выполнится условие $|r_t| \geq \varepsilon$ для некого $t = k$.

В этом случае рассмотрим последовательность $R(k,W) = \{r_t\}_{t=k}^{k+W}$. Если $\max\limits_{t \in R(k,W)} |r_t| \geq \varepsilon$, то индекс t отнесем к множеству T_2 и перейдем к следующему значению временного индекса. Так будем продолжать, пока не выполнится условие $\max\limits_{t \in R(k,H)} |r_t| < \varepsilon$ для некого $t = k_1$. В этом случае вернемся к уже описанным действиям для случая $|r_t| < \varepsilon$.

Полученные таким образом множества T_1 и T_2 будут содержать временные индексы, соответствующие разным режимам функционирования индекса. А именно T_1 соответствует спокойному поведению (штиль), а T_2 соответствует бурному поведению (шторм).

Раскрашенный в соответствии с этим алгоритмом график доходностей приведен под номером 10. Зеленым цветом обозначены элементы множества T_1, а красным цветом – множества T_2.

График 10.



Параметры W и $\varepsilon > 0$ определяются экспериментатором таким образом, чтобы бурные периоды были отчетливо видны, при этом большую часть графика должно занимать спокойное поведение.

2. Статистические свойства двух режимов поведения индекса.

С помощью алгоритма, описанного выше, вся имеющаяся выборка значений индекса была разделена на две части, соответствующие спокойному и бурному поведению индекса. Далее каждая из полученных выборок была изучена с помощью методов, применявшихся для исследования исходной выборки.

Результаты исследования указывают на значительное различие между свойствами режимов. Ниже кратко приводится сравнение основных свойств спокойного и бурного режимов.

Во-первых, обнаруживается, что в каждом из режимов общие свойства распределения остаются такими же, как у исходного распределения, за исключением принципиальной ограниченности области определения функции в спокойном режиме, что обусловлено правилом разделения режимов. Этим также объясняется то, что функция распределения спокойного режима практически полностью описывается экспоненциальной функциональной зависимостью.

Функция распределения, соответствующая бурному режиму, в центральной части также имеет экспоненциальное распределение, однако коэффициент экспоненты примерно в два раза меньше по абсолютной величине, чем в спокойном режиме, то есть функция спадает значительно медленнее. В этом случае поведение хвоста распределения определяется степенной убывающей функцией.

Во-вторых, был было обнаружено важное отличие в поведении значения индекса в различных режимах. Для этого, вместо графика значений индекса был построен график нарастающей суммы доходностей индекса для каждого из режимов, который повторяет изменения графика значений индекса, но в отличие от него отображает приращения в сравнимых величинах. Путем сравнения полученного графика с графиком доходностей индекса было обнаружено, что для спокойного режима характерен рост индекса, в то время как для бурного режима характерно либо его падение, либо колебание вокруг определенного уровня.

В-третьих, оказалось, что в обоих режимах поведения фондового индекса присутствует память, то есть между временными сечениями случайного процесса (последовательность доходностей) существует зависимость. Характерно то, что в бурном периоде зависимость выражена сильнее, чем в спокойном периоде.

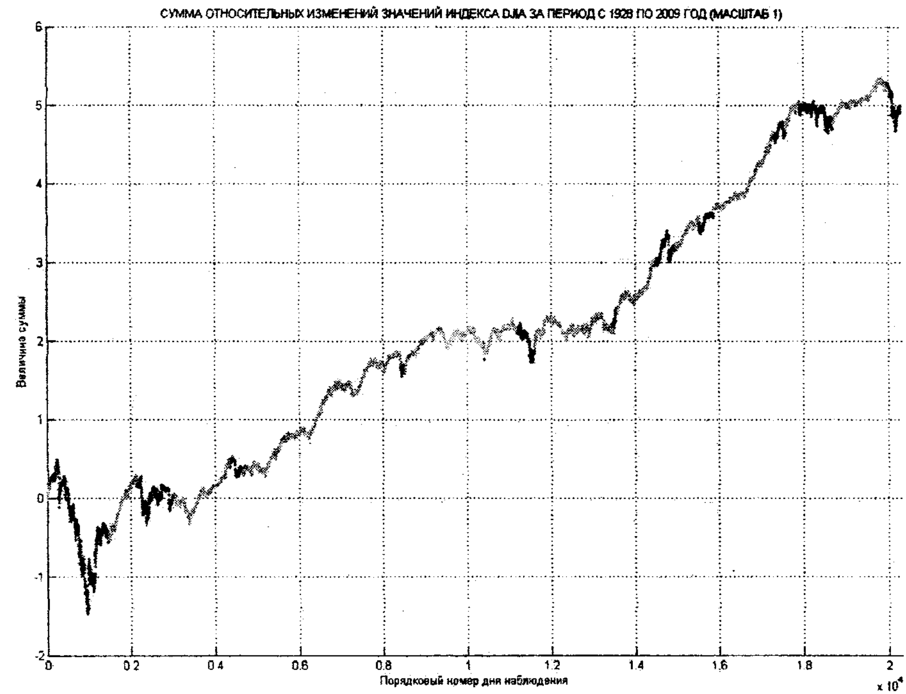
ВОЗМОЖНОСТЬ РАННЕГО ОБНАРУЖЕНИЯ ФИНАНСОВЫХ КРИЗИСОВ.

1. Поведение индекса в кризисный период. Использование границы режимов в качестве индикатора начала кризисного периода.

В данном разделе предлагается рассмотреть поведение индекса в период кризиса.

Для выделения кризисных периодов воспользуемся алгоритмом разделения режимов функционирования индекса, приведенным в предыдущем разделе.

График 11.



На графике 10 изображена последовательность доходностей r_t индекса. Красным цветом выделены периоды бурного (кризисного) поведения индекса, зеленым – спокойного поведения.

Для исследования поставленного вопроса потребуется также график нарастающей суммы доходностей $R(t)=\sum_{k=1}^{t} r_k$. На нем можно наглядно увидеть все произошедшие кризисы с момента начала имеющегося статистического материала.

Напомним, что исходный график значений индекса неудобно использовать по причине пропорциональности абсолютных изменений индекса его значению, что приводит к чрезмерно сильному изображению недавних колебаний по сравнению с колебаниями, дальше отстоящими по времени от конца статистического материала.

Нарастающая сумма доходностей изображена на графике 11. Как и на графике доходностей, красным цветом выделены периоды бурного (кризисного) поведения, а зеленым – спокойного поведения.

Разместив эти два графика один под другим так, чтобы шкалы их осей абсцисс совпали, можно заметить, что максимальные всплески колебаний доходностей приходятся обычно на периоды наиболее быстрого падения индекса.

Как только значение нарастающей суммы доходностей, а значит и значение индекса, начинает необычно быстро падать, это сразу же влечет увеличение колебаний доходностей. Этот феномен внушает уверенность в том, что предложенный алгоритм разделения режимов функционирования индекса, или любой другой подобный алгоритм, может служить инструментом раннего *оповещения о надвигающемся кризисе.*

Для этого достаточно всего лишь обрабатывать с помощью него поступающие данные. И если график доходностей заканчивается красным периодом, то это может служить сигналом к возможному развитию кризиса.

Чувствительность алгоритма к усилению колебаний доходности регулируется с помощью параметров алгоритма W и $\varepsilon > 0$.

Как можно видеть из графика нарастающей суммы доходностей, при использованных в работе параметрах $W = 200$ наблюдений и $\varepsilon = 0.03$ позволяет заблаговременно идентифицировать начало бурного периода, а значит, адекватно отреагировать.

III. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ.

Проведено исследование статистических свойств фондовых индексов, выполнено сравнение их с положениями гипотезы эффективного рынка.

Поставлены и решены задачи исследования свойств функции распределения суточных доходностей фондовых индексов, изучения наличия памяти в последовательности их изменений, выделения различных режимов поведения индексов и исследования их статистические свойств.

Обнаружено, что свойства фондовых индексов существенно отличаются от математической модели эффективного рынка (броуновского движения).

Во-первых, это отличие выражается в функции распределения фондовых индексов. Было установлено, что центральная часть реальной функции распределения имеет экспоненциальное поведение, причем интервал, на котором наблюдается данное поведение, охватывает более 98 % статистических данных. Поведение же реальной функции распределения в области экстремальных значений определяется степенной функциональной зависимостью.

Во-вторых, отклонение от модели эффективного рынка обусловлено наличием памяти в последовательности суточных доходностей индексов. Обнаружено, что память заключена в амплитуде относительных колебаний индекса, при этом направления изменений индекса, соответствующие различным моментам времени, никак не связаны между собой или связаны очень слабо. Этим объясняется кластеризация больших по модулю доходностей. График суточных доходностей от времени выглядит, как последовательность периодов, практически не содержащих экстремальных событий, и периодов, богатых на экстремальные события.

В-третьих, расхождение с моделью эффективного рынка заключается в нестационарности последовательности относительных изменений индексов.

Выделены два режима поведения индекса – режим спокойного поведения и режим бурного поведения. Обнаружено, что рост индекса происходит преимущественно в периоды спокойного поведения индекса, когда как периоды бурного поведения характеризуются либо падением индекса, либо колебанием около определенного уровня. Также выявлено, что память имеется в обоих режимах поведения индекса, причем сильнее она выражена в режиме бурного поведения.

Полученные результаты позволяют уточнить математическая модель эффективного рынка. Слабо субмартингальный случайный процесс с эффектом кластеризации больших по модулю доходностей и с функцией распределения со степенными хвостами и экспоненциальной центральной частью является более подходящим для описания свойств фондовых индексов, чем броуновское движение. Под слабой субмартингальностью здесь понимается тот факт, что математическое ожидание доходности в заданный момент времени имеет малую положительную величину. Это следует из того, что в среднем индекс *медленно растет*.

Выявленные свойства фондовых индексов позволяют использовать алгоритм разделения режимов поведения в качестве инструмента, который может выявить появление кризисных тенденций, когда они еще только зарождаются. Использование этого инструмента представляется полезным в целях увеличения скорости реакции заинтересованных субъектов на кардинальное изменение экономической ситуации.

Основные публикации по теме диссертации:

1. Уренцов О.В. Управление риском и теория фракталов, с. 74-76, Проблемы управления рисками и безопасностью, Труды Института Системного Анализа РАН, том 31, 2007

2. Уренцов О.В. Проверка возможности предсказания кризисов на финансовом рынке с помощью метода Д. Сорнетте, с. 174-191, Теория и практика системных преобразований, Труды Института Системного Анализа РАН, том 40, 2008