МОРДОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. П. ОГАРЕВА

на правах рукописи

Лискина Екатерина Юрьевна

УДК 517.925

НЕНУЛЕВЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

05.13.18 – Теоретические основы математического моделирования, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

САРАНСК - 2000

Работа выполнена на кафедре математического анализа
Рязанского государственного
педагогического университета

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
профессор М. Т. Терехин

Официальные оппоненты: доктор физико-математических
наук, профессор А. И. Зейфман

кандидат физико-математических
наук А. Ю. Павлов

Ведущая организация: Белорусский государственный
университет

Защита состоится "1" ноября 2000 г. в 15 час. 30 мин. на заседании специализированного Совета К 063.72.04 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Мордовском государственном университете имени Н.П. Огарева по адресу: 430000, г. Саранск, ул. Большевистская, 68

С диссертацией можно ознакомиться в Научной библиотеке Мордовского государственного университета.

Автореферат разослан "29" сентября 2000 г.

Ученый секретарь
специализированного Совета,
канд. физ.-мат. наук, доцент С. М. Мурюмин.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В настоящей работе изучается неавтономная система обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянной матрицей линейного приближения и нелинейностью, непрерывной по фазовым переменным и периодическая по аргументу. Задачей исследования является поиск достаточных условий существования ненулевых малых периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Необходимость решения данной задачи возникает при математическом моделировании физических, химических, биологических, биофизических, экономических и других процессов.

Вопросам существования периодических решений систем дифференциальных уравнений посвящено большое количество работ, начиная от классических трудов А. Пуанкаре и А.М. Ляпунова до новейших исследований современных математиков. Существенный вклад в развитие этой теории внесли Л.И. Мандельштам, А.А. Андронов, И.Г. Малкин, М.А. Красносельский. Эту проблему решали А.А. Бойчук, А.Д. Брюно, С.А. Гребенников, Ю.А. Рябов, Дж. Хейл, Ю.В. Малышев, Е.В. Воскресенский и другие математики.

Многообразие конкретных систем, описывающих реальные процессы, и сложность проблемы не позволяют пока найти общего подхода к ее решению. Обширную область для исследования представляют случаи, требующие привлечения нелинейных членов для решения задачи. Таким образом, задача поиска условий существования ненулевых периодических решений в нелинейных случаях является весьма актуальной.

Цель работы: получение достаточных условий существования малых ненулевых периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с помощью искусственного введения в систему малого параметра.

Методика исследования. Задача поиска условий существования ненулевых периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений посредством искусственного введения параметра сводится к задаче поиска условий существования семейства ненулевых периодических решений системы с параметром, а затем – к отысканию пары: начальное условие, параметр, – определяющей такие решения. Последняя задача решается классическим методом неподвижной точки нелинейного оператора. Построение нелинейного оператора основано как на свойствах матрицы линейного приближения, так и на свойствах нелинейных членов правой части системы.

Научная новизна. В работе предложен новый способ получения достаточных условий существования малых ненулевых периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Доказаны теоремы, являющиеся новыми достаточными условиями существования таких решений.

Научная и практическая ценность работы заключается в возможности применить полученные признаки существования периодических решений к исследованию конкретных систем дифференциальных уравнений, являющихся моделями природных, социальных и экономических процессов.

На защиту выносятся следующие положения:

1. Приведение системы обыкновенных дифференциальных уравнений к системе с параметром. Достаточные условия существования семейства ненулевых периодических решений при условии использования структуры матрицы линейного приближения.

2. Алгоритм разрешимости задачи о существовании семейства малых ненулевых периодических решений при условии, что из нелинейных по параметру и фазовым переменным членов системы можно выделить непрерывные формы по совокупности компонент параметра и фазовой переменной.

3. Критерии существования периодических решений, когда нелинейность системы по параметру и фазовой переменной позволяет выделить форму особого вида.

Апробация диссертации. Основные результаты докладывались на заседаниях научно-исследовательского семинара по качественной теории дифференциальных уравнений в Рязанском государственном педагогическом университете, на VII Международной конференции "Математика. Компьютер. Образование" в г. Дубна, на IV Международной конференции "Дифференциальные уравнения и их приложения" в г. Саранске, на V Всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов "Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании" в Рязанской государственной радиотехнической академии, в V Крымской Международной математической школе "Метод функций Ляпунова и его приложения" в г. Алушта, на семинаре Средневолжского математического общества под руководством профессора Е. В. Воскресенского.

Публикации. Основные результаты работы отражены в десяти публикациях, список которых приведен в конце автореферата.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на параграфы, заключения и библиографического списка литературы. Общий объем диссертации 96 страниц машинописного текста. Библиографический список содержит 89 наименований.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается обоснование актуальности темы диссертации, содержится краткий обзор работ по ее тематике, сформулированы основные результаты, полученные в работе.

В первой главе исследуется задача поиска условий существования ненулевых периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений в малой окрестности тривиального решения.

В первом параграфе рассматривается преобразование, приводящее исходную задачу к задаче поиска условий существования ненулевых периодических решений системы дифференциальных уравнений с параметром.

Рассмотрим систему n дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = A\,x + f(t, x), \qquad (1.1)$$

где $x \in R^n$, R^s – s-мерное вещественное векторное пространство, A – постоянная $n \times n$-матрица, $f(t, x)$ – n-мерная вектор-функция, определеная и непрерывная по переменным t, x на множестве $[0, \omega] \times \Omega(\varepsilon_0)$, $\varepsilon_0 > 0$, ω-периодическая по $t \in]-\infty, \infty[$, $\omega > 0$ – некоторое число, множество $\Omega(\varepsilon_0)$ определяется соотношением $\Omega(\varepsilon_0) = \{x \in R^n, \|x\| \le \varepsilon_0\}$, $\lim\limits_{\|x\| \to 0} f(t, x)\|x\|^{-1} = 0$ равномерно по $t \in [0, \omega]$, $\|x\| = \max\limits_{i=\overline{1, n}}\{|x_i|\}$. Будем полагать, что система (1.1) на множестве $[0, \omega] \times \Omega(\varepsilon_0)$ удовлетворяет условиям существования, единственности и непрерывной зависимости решения от начальных данных.

С помощью замены переменных $x = [E + B(\mu)]\bar{x}$ (вектор $\mu \in R^m$, $B(\mu)$, E – соответственно известная непрерывная по μ и единичная $n \times n$-матрицы, $B(0) = 0$) система (1.1) приводится к в виду

$$\dot{x} = Ax + Q(\mu)x + g(t, x, \mu), \qquad (1.2)$$

в котором $Q(\mu)$ – $n \times n$-матрица, определенная и непрерывная по $\mu \in M(\delta_0)$, $M(\delta_0) = \{\mu \in R^m, \|\mu\| \le \delta_0\}$, $\lim\limits_{\mu \to 0} Q(\mu) = 0$, $g(t, x, \mu)$ – вектор-функция, непрерывная по t, x и μ на множестве $[0, \omega] \times \Omega(\delta_0) \times M(\delta_0)$, ω-периодическая по $t \in]-\infty, \infty[$, $g(t, 0, \mu) = 0$, $\lim\limits_{\|x\| \to 0} g(t, x, \mu)\|x\|^{-1} = 0$ равномерно по $t \in [0, \omega]$ и $\mu \in M(\delta_0)$, $\delta_0 = \min\{\varepsilon_0, \delta_{01}\}$. Число $\delta_{01} > 0$ выбрано так, что выполнено неравенство $|p(\mu)| < 1$, $p(\mu)$ – непрерывная функция μ, определенная равенством $\det[E + B(\mu)] = 1 + p(\mu)$.

Предполагается, что справедливо представление $g(t, x, \mu) = G(t, x, \mu)x$, в котором $G(t, x, \mu)$ – $n \times n$-матрица, непрерывная по t, x и μ на множестве $[0,\ \omega]\times\Omega(\delta_0)\times\mathrm{M}(\delta_0)$, ω-периодическая по $t\in\left]-\infty,\ \infty\right[$. Вместе с системой (1.2) рассматриваются системы

$$\dot{y}=Ay+Q(\mu)y+G(t,\ x(t,\ \alpha,\ \mu),\ \mu)y, \tag{1.3}$$

$$\dot{z}=Az+Q(\mu)z+g(t,\ x(t,\ \alpha,\ \mu),\ \mu), \tag{1.4}$$

$$\dot{x}=Ax. \tag{1.5}$$

Теорема 1.1. Если решение $x(t,\alpha,\mu)$ системы (1.2) и решение $y(t,\ \alpha,\ \mu)$ системы (1.3) для любого фиксированного $\mu\in\mathrm{M}(\delta_0)$ удовлетворяют условию $x(0,\ \alpha,\ \mu)=y(0,\ \alpha,\ \mu)=\alpha$, то эти решения совпадают всюду на отрезке $[0,\ \omega]$.

Аналогичная теорема справедлива и для решений систем (1.2) и (1.4)

Пусть $Y(t,\alpha,\mu)$, $X(t)$ – фундаментальные матрицы решений систем (1.3) и (1.5) соответственно, $Y(0,\ \alpha,\ \mu)=X(0)=E$. Тогда решение $y(t,\ \alpha,\ \mu)$ системы (1.3), удовлетворяющее начальному условию $y(0,\alpha,\mu)=\alpha$, можно записать как $y(t,\alpha,\mu)=Y(t,\alpha,\mu)\alpha$, а матрицу $Y(t,\alpha,\mu)$ можно представить в виде $Y(t,\ \alpha,\ \mu)=X(t)+\Phi(t,\ \alpha,\ \mu)$, где свойства матрицы $\Phi(t,\alpha,\ \mu)$ полностью определяются свойствами матриц $Y(t,\ \alpha,\ \mu)$, $X(t)$, $G(t,\ x,\ \mu)$. Тогда условие существования малого ненулевого периодического решения системы (1.2) можно записать так:

$$[X(\omega)-E]\alpha+Q^*(\mu)\alpha+G^*(\alpha,\ \mu)\alpha=0, \tag{1.6}$$

где $Q^*(\mu)$, $G^*(\alpha,\mu)$ – непрерывные по своим переменным $n\times n$-матрицы, $Q^*(0)=0$, $\lim\limits_{\|\sigma\|\to 0}G^*(\alpha,\ \mu)=0$, $\sigma=colon(\alpha,\ \mu)$, $\|\sigma\|=\max\{\|\alpha\|,\ \|\mu\|\}$, $\|\alpha\|=\max\limits_{i=1,n}\{|\alpha_i|\}$, $\|\mu\|=\max\limits_{i=1,n}\{|\mu_i|\}$.

Во втором параграфе установлены достаточные условия существования малых ненулевых периодических решений системы (1.2) с использованием структуры матрицы линейного приближения.

Пусть выполняются условия:

1.1. $rang[X(\omega)-E]=0$.

1.2. Справедливо представление

$$Q^*(\mu)=Q_0^*(\mu)+Q_1^*(\mu),$$

где $Q_0^*(\mu)$, $Q_1^*(\mu)$ – $n\times n$-матрицы, в элементы которых компоненты вектора μ входят линейно и в степени, больше или равной 2 соответственно.

Введем обозначения $\|\alpha\|=\rho_\alpha$, $e_\alpha=\rho_\alpha^{-1}\alpha$, $\|e_\alpha\|=1$, $\|\sigma\|=\rho$. Тогда систему (1.6) можно переписать в виде

$$Q_0^*(\mu)e_\alpha+Q_1^*(\mu)e_\alpha+G^*(\rho_\alpha e_\alpha,\mu)e_\alpha=0. \qquad (1.7)$$

Установлено, что справедливо равенство $Q_0^*(\mu)e_\alpha=\overline{Q}_0(e_\alpha)\mu$ и при $m\geq n$ из матрицы $\overline{Q}_0(e_u)$ можно выделить $n\times n$-матрицу $\widetilde{Q}_0(e_\alpha)$.

Теорема 1.4. Пусть:

1) выполняются условия 1.1, 1.2, $m\geq n$,

2) существует вектор $e_\alpha^*\in R^n$, $\|e_\alpha^*\|=1$, такой, что $\det\widetilde{Q}_0(e_\alpha^*)\neq 0$.

Тогда система (1.2) имеет ненулевое ω-периодическое решение.

Замечание. Подставляя найденное решение системы (1.2) в выражение $x=[E+B(\mu)]\overline{x}$, получим семейство малых ненулевых ω-периодических решений системы (1.1) $x(t,\alpha^*)=[E+B(\mu^*)]\overline{x}(t,\alpha^*,\mu^*)=x(t,\alpha^*(\mu^*))$.

Если $rang[X(\omega)-E]=r$, $0<r<n$, справедливо представление 1.2 и $m\geq n$, то после замены переменных $\alpha=Nd$ (d – $(n-r)$-мерный вектор, N – $n\times(n-r)$-матрица, столбцами которой являются $n-r$ линейно независимых решений системы $[X(\omega)-E]\alpha=0$), то условие существования малых ненулевых ω-периодических решений системы (1.2) можно привести к виду, аналогичному (1.7).

Далее установлено существование единичного вектора e_α, удовлетворяющего условию 2) теоремы 1.4.

Теорема 1.5. *Для того чтобы существовал единичный вектор e_α такой, что $\det\widetilde{Q}_0(e_\alpha)\neq 0$ достаточно, чтобы хотя бы один из коэффициентов*

$$\widetilde{Q}_i^{1(n_1),\,2(n_2),\,3(n_3),\,\ldots,\,n(n_n)}=\begin{vmatrix}\widetilde{q}_{11}^{\,i_1}e_{i_1} & \widetilde{q}_{12}^{\,i_2}e_{i_2} & \cdots & \widetilde{q}_{1n}^{\,i_n}e_{i_n}\\ \widetilde{q}_{21}^{\,i_1}e_{i_1} & \widetilde{q}_{22}^{\,i_2}e_{i_2} & \cdots & \widetilde{q}_{2n}^{\,i_n}e_{i_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \widetilde{q}_{n1}^{\,i_1}e_{i_1} & \widetilde{q}_{n2}^{\,i_2}e_{i_2} & \cdots & \widetilde{q}_{nn}^{\,i_n}e_{i_n}\end{vmatrix}$$

выражения

$$\det\widetilde{Q}_0(e_\alpha)=\sum_{n_1+n_2+\ldots+n_n=n}\widetilde{Q}_i^{1(n_1),\,2(n_2),\,3(n_3),\,\ldots,\,n(n_n)}e_1^{n_1}e_2^{n_2}e_3^{n_3}\ldots e_n^{n_n}$$

был отличен от нуля.

Во второй главе продолжается изучение той же проблемы. Основные условия налагаются на нелинейные по параметру и фазовой переменной члены правой части системы (1.2).

В первом параграфе получен алгоритм разрешимости задачи существования ненулевых периодических решений системы (1.2)

Пусть выполняются следующие условия:

2.1. $rang[X(\omega)-E]=r$, $0\le r<n$.

2.2. Справедливо представление

$$Q^*(\mu)\alpha+G^*(\alpha,\mu)\alpha=s(\alpha,\mu)+o\left(\|\sigma\|^k\right),$$

в котором $s(\alpha,\mu)$ – форма порядка k по совокупности компонент векторов α и μ, $k\ge 2$, $\lim\limits_{|\sigma|\to 0} o\left(\|\sigma\|^k\right)\|\sigma\|^{-k}=0$.

Введем обозначения: $\|\sigma\|=\rho$, $\alpha=\rho\beta$, $\mu=\rho\lambda$, $\zeta=colon(\beta,\lambda)$, $\|\zeta\|=1$, $O(\rho)=\rho^{-k}o(\rho^k)$, $\lim\limits_{\rho\to 0}O(\rho)=0$, тогда систему (1.6) можно представить в виде

$$\widetilde{s}(\zeta)+O(\rho)=0$$

Теорема 2.1. Если при любом ζ, $\|\zeta\| = 1$, выполнено неравенство $\tilde{s}(\zeta) \neq 0$, то существует такое число $\delta' \in]0, \delta_0[$, что для любых векторов $\alpha \in U(\delta')$, $\mu \in \mathrm{M}(\delta')$ система (1.2) не имеет малых ненулевых ω-периодических решений.

Теорема 2.2. Пусть:

1) выполняются условия 2.1, 2.2;

2) существует вектор $\zeta_0 \in R^{n+m}$, $\|\zeta_0\| = 1$, такой, что $\tilde{s}(\zeta_0) = 0$, $\zeta_0 = colon(\beta_0, \lambda_0)$;

3) $rang\, D\tilde{s}(\zeta_0) = n$, где $D\tilde{s}(\zeta_0)$ – $n \times (n+m)$-мерная матрица Якоби функции $\tilde{s}(\zeta)$, вычисленная при $\zeta = \zeta_0$;

4) $\beta_0 \neq 0$.

Тогда система (1.2) имеет ненулевое ω-периодическое решение.

Замечание. Подставляя найденное решение системы (1.2) в выражение $x = [E + B(\mu)]\bar{x}$, получим семейство малых ненулевых ω-периодических решений системы (1.1) $x(t, \alpha^*) = [E + B(\mu^*)]\bar{x}(t, \alpha^*, \mu^*) = x(t, \alpha^*(\mu^*))$.

Предположим, что при всех $\zeta_0 \in R^{n+m}$ таких, что $\tilde{s}(\zeta_0) = 0$, выполняется равенство $rang\, D\tilde{s}(\zeta_0) = r$, $0 \le r < n$. Случай $0 < r < n$ с помощью замены переменных $\Delta\zeta = M\gamma$ (M – $(n+m) \times (n+m-r)$-матрица, столбцами которой являются $n+m-r$ линейно независимых решений системы $D\tilde{s}(\zeta_0)\Delta\zeta = 0$, γ – $(n+m-r)$-мерный вектор) переходит в случай $r = 0$.

В случае $r = 0$ для формы $p_j(\zeta_0, \Delta\zeta)$ наименьшего j-го порядка относительно вектора $\Delta\zeta$ установлены теоремы, аналогичные теоремам 2.1 и 2.2 (форма $p_j(\zeta_0, \Delta\zeta)$ определяется по формуле Тейлора для формы $\tilde{s}(\zeta)$).

Таким образом, если выполняются условия 2.1, 2.2, то имеет место алгоритм, позволяющий последовательно получать достаточные условия существования ненулевых ω-периодических решений системы (1.2) с использованием форм порядка j, $j \in \{2, 3, \ldots, k\}$. Длительность алгоритма зависит от значения j. Алгоритм завершается после того, как закончатся формы порядка l, $l \in \{j, j+1, j+2, \ldots, k\}$, с отличными от нуля коэффициентами.

Во втором параграфе получены признаки существования малых ненулевых периодических решений системы(1.2), а вместе с ней и системы (1.1), для другого представления нелинейных членов.

Пусть выполняются условие 2.1 и условие:

2.3. Справедливо представление

$$Q^*(\mu)\alpha + G^*(\alpha, \mu)\alpha = S(\alpha)\mu + s_0(\alpha) + s_1(\alpha, \mu) + o(\rho^k),$$

где $S(\alpha)$ – $n \times m$-матрица, элементами которой являются формы порядка $k-1$, $(k \geq 2)$, относительно компонент вектора α, $s_0(\alpha)$, $s_1(\alpha, \mu)$ – непрерывные формы порядка k по совокупности компонент векторов α и μ, в форму $s_1(\alpha, \mu)$ компоненты вектора μ входят в степени, не ниже второй, $\rho \doteq \|\sigma\|$, $\lim\limits_{\rho \to 0} o(\rho^k)\rho^{-k} = 0$, $s_0(0) = 0$, $s_1(\alpha, 0) = 0$, $\lim\limits_{\|\mu\| \to 0} s_1(\alpha, \mu)\|\mu\|^{-1} = 0$ равномерно относительно $\alpha \in U(\delta_0)$.

Введем обозначения: $\|\alpha\| = \rho_\alpha$, $\alpha = \rho_\alpha e_\alpha$, $\|e_\alpha\| = 1$. Тогда систему (1.6) можно записать так:

$$S(e_\alpha)\mu + \rho_\alpha s_0(e_\alpha) + \rho_\alpha^{1-k} s_1(\rho_\alpha e_\alpha, \mu) + \rho_\alpha^{1-k} o(\rho^k) = 0.$$

Пусть так же выполняются условия:

2.4. $\mu = colon(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, $m \geq n$.

2.5. Существует такой вектор $\bar{e}_\alpha \in R^n$, $\|\bar{e}_\alpha\| = 1$, что $rang\, S(\bar{e}_\alpha) = n$.

Справедлива следующая

Теорема 2.5. Пусть:

1) выполняются условия 2.1, 2.3–2.5;

2) при любом $e_\alpha \in R^n$, $\|e_\alpha\| = 1$, справедливо равенство

$$s_1(\rho_\alpha e_\alpha, \mu) = q(\rho_\alpha e_\alpha, \overline{\mu}) + \widetilde{q}(\rho_\alpha \overline{e}_\alpha, \overline{\mu}, \overline{\overline{\mu}}),$$

где $\overline{\mu}$, $\overline{\overline{\mu}}$ – векторы размерностей n и $m-n$ соответственно составлены из компонент вектора μ, $q(\rho_\alpha e_\alpha, \overline{\mu})$, $\widetilde{q}(\rho_\alpha \overline{e}_\alpha, \overline{\mu}, \overline{\overline{\mu}})$ – формы порядка k по совокупности своих переменных, $q(\rho_\alpha e_\alpha, 0) = 0$, $\lim\limits_{\|\overline{\mu}\| \to 0} q(\rho_\alpha e_\alpha, \overline{\mu}) \|\overline{\mu}\|^{-1} = 0$ равномерно по $\rho_\alpha \in \left]0, \delta_0\right]$, $\lim\limits_{\|\overline{\overline{\mu}}\| \to 0} \widetilde{q}(\rho_\alpha e_\alpha, \overline{\mu}, \overline{\overline{\mu}}) \|\overline{\overline{\mu}}\|^{-1} = 0$ равномерно по $\rho_\alpha \in \left]0, \delta_0\right]$ и $\overline{\mu} \in \overline{\mathrm{M}}(\delta_0)$, $\overline{\mathrm{M}}(\delta_0) = \left\{ \overline{\mu} \in R^n, \|\overline{\mu}\| \le \delta_0 \right\}$;

3) справедливо представление

$$\rho_\alpha^{1-k} o(\rho^k) = \vartheta_1(\rho_\alpha, \|\mu\|) + \vartheta_2(\rho_\alpha, \|\mu\|),$$

где $\lim\limits_{\rho_\alpha \to 0} \vartheta_1(\rho_\alpha, \|\mu\|) = 0$ равномерно по $\mu \in \mathrm{M}(\delta_0)$, $\lim\limits_{\|\overline{\mu}\| \to 0} \vartheta_2(\rho_\alpha, \|\mu\|) \|\overline{\mu}\|^{-1} = 0$ равномерно по $\rho_\alpha \in \left]0, \delta_0\right]$ и $\overline{\overline{\mu}} \in \overline{\overline{\mathrm{M}}}(\delta_0)$, $\overline{\overline{\mathrm{M}}}(\delta_0) = \left\{ \overline{\overline{\mu}} \in R^{m-n}, \|\overline{\overline{\mu}}\| \le \delta_0 \right\}$

Тогда система (1.2) имеет ненулевое ω-периодическое решение.

Замечание. Подставляя найденное решение системы (1.2) в выражение $x = [E + B(\mu)]\overline{x}$, получим семейство малых ненулевых ω-периодических решений системы (1.1) $x(t, \alpha^*) = [E + B(\mu^*)]\overline{x}(t, \alpha^*, \mu^*) = x(t, \alpha^*(\mu^*))$.

Предположим, что вместе с условиями 2.1 и 2.3 выполняются условия:

2.6. $m < n$

2.7. Существует такой вектор $e'_\alpha \in R^n$, $\|e'_\alpha\| = 1$, что $rang S(e'_\alpha) = m$.

2.8. На единичной сфере существует некоторая окрестность

$$N_{e'_\alpha}(\chi) = \{ e_\alpha \in R^n, \|e_\alpha\| = 1, rang S(e_\alpha) = m, \|e_\alpha - e'_\alpha\| \le \chi \}$$

вектора e'_α, в которой $rang S(e_\alpha) = m$.

Тогда для всех $e_\alpha \in N_{e'_\alpha}(\chi)$ систему (1.6) можно привести к виду

$$T(e_\alpha)\mu + \rho_\alpha \varphi(e_\alpha) + \rho_\alpha^{1-k} \tilde{\varphi}(\rho_\alpha e_\alpha, \mu) + \rho_\alpha^{1-k} o_m(\rho^k) = 0,$$

$$\psi(e_\alpha) + \rho_\alpha^{-k} \tilde{\psi}(\rho_\alpha e_\alpha, \mu) + \rho_\alpha^{-k} o_{n-m}(\rho^k) = 0,$$

где $T(e_\alpha)$ – $m \times m$-матрица, $\det T(e_\alpha) \ne 0$ для всех $e_\alpha \in N_{e'_\alpha}(\chi)$; $\varphi(e_\alpha)$, $\tilde{\varphi}(\rho_\alpha e_\alpha, \mu)$ – соответственно m-мерные, а $\psi(e_\alpha)$, $\tilde{\psi}(\rho_\alpha e_\alpha, \mu)$ – $(n-m)$-мерные вектор-функции.

Теорема 2.7. Пусть:

1) выполняются условия 2.1, 2.3, 2.6–2.8;

2) существует единичный вектор $\tilde{e}_\alpha \in N_{e'_\alpha}(\chi)$ такой, что $\psi(\tilde{e}_\alpha) = 0$;

3) $rang D\psi(\tilde{e}_\alpha) = n - m$, где $D\psi(\tilde{e}_\alpha)$ – $(n-m) \times n$-мерная матрица Якоби от функции ψ, вычисленная в точке $e_\alpha = \tilde{e}_\alpha$;

4) $\vartheta(\rho_\alpha, \rho^k) \equiv \begin{bmatrix} \rho_\alpha^{1-k} o_m(\rho^k) \\ \rho_\alpha^{-k} o_{n-m}(\rho^k) \end{bmatrix}$, справедливо представление $\vartheta(\rho_\alpha, \rho^k) = \vartheta_1(\rho_\alpha, \|\mu\|) + \vartheta_2(\rho_\alpha, \|\mu\|)$, $\lim\limits_{\rho_\alpha \to 0} \vartheta_1(\rho_\alpha, \|\mu\|) = 0$ равномерно по $\|\mu\| \in]0, \delta_0]$, $\lim\limits_{\|\mu\| \to 0} \vartheta_2(\rho_\alpha, \|\mu\|)\|\mu\|^{-1} = 0$ равномерно по $\rho_\alpha \in]0, \delta_0]$.

Тогда система (1.2) имеет ненулевое ω-периодическое решение.

Замечание. Подставляя найденное решение системы (1.2) в выражение $x = [E + B(\mu)]\bar{x}$ получим семейство малых ненулевых ω-периодических решений системы (1.1) $x(t, \alpha^*) = [E + B(\mu^*)]\bar{x}(t, \alpha^*, \mu^*) = x(t, \alpha^*(\mu^*))$.

В третьей главе для системы обыкновенных дифференциальных уравнений найдены условия существования малых ненулевых периодических решений с начальными условиями специального вида.

В первом параграфе получено преобразование, приводящее систему уравнений относительно пары: начальное условие, параметр, – к виду, позволяющему находить условия существования таких решений.

Условие существования ненулевых ω-периодических решений системы (1.2) записано в виде

$$D(\alpha, \mu)\alpha = 0, \tag{3.1}$$

где $D(\alpha, \mu) = [X(\omega) - E + Q^*(\mu) + G^*(\alpha, \mu)]$.

Теорема 3.1. Если $rang[X(\omega) - E] = r$, $0 \le r < n$, тогда существует такое число $\delta_1 \in]0, \delta_0[$, что на множестве $U(\delta_1) \times M(\delta_1)$ справедливо равенство

$$SD(\alpha, \mu)P(\alpha, \mu) = H(\alpha, \mu), \tag{3.2}$$

где S – некоторая постоянная неособенная $n \times n$-матрица, $H(\alpha, \mu)$ – непрерывная по $(\alpha, \mu) \in U(\delta_1) \times M(\delta_1)$ $n \times n$-матрица, один из столбцов которой содержит r нулевых элементов и $n - r$ элементов вида $h_i(\alpha, \mu)$, $i = \overline{r+1, n}$, $h_i(0, 0) = 0$, $h_i(\alpha, \mu) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\mu \to 0$, $\det P(\alpha, \mu) = 1$.

Следствие. Если $rang[X(\omega) - E] = r$, $0 \le r < n$, тогда существует такое число $\delta_1 \in]0, \delta_0[$, что на множестве $U(\delta_1) \times M(\delta_1)$ справедливо равенство

$$SD(\alpha, \mu)\overline{P}(\alpha, \mu) = \overline{H}(\alpha, \mu), \tag{3.2'}$$

где S – некоторая постоянная неособенная $n \times n$-матрица, $\overline{H}(\alpha, \mu)$ – непрерывная по $(\alpha, \mu) \in U(\delta_1) \times M(\delta_1)$ $n \times n$-

матрица, $n-r$ столбцов которой содержат r нулевых элементов и $n-r$ элементов вида $\bar{h}_{ij}(\alpha, \mu)$, $i, j = \overline{r+1, n}$, $\bar{h}_{ij}(0, 0) = 0$, $\bar{h}_{ij}(\alpha, \mu) \to 0$ при $\alpha \to 0$, $\mu \to 0$, $\det \bar{P}(\alpha, \mu) = 1$.

Во втором параграфе приведены достаточные условия существования малых ненулевых периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями специального вида.

Предположим, что выполняются условия:

3.1. $rang[X(\omega) - E] = r$, $0 \le r < n$;

3.2. Существует число $\delta_1 \in \left]0, \delta_0\right[$ такое, что при всех $(\alpha, \mu) \in U(\delta_1) \times M(\delta_1)$ имеет место равенство (3.2), в котором $H(\alpha, \mu)$, $P(\alpha, \mu)$ определены в условии теоремы 3.1;

3.3. Функции $h_i(\alpha, \mu)$, $i = \overline{r+1, n}$, могут быть представлены в виде $h_i(\alpha, \mu) = q_i(\mu) + g_i(\alpha, \mu)$, $i = \overline{r+1, n}$, $q_i(0) = 0$, $g_i(0, \mu) = 0$, $g_i(\alpha, \mu) \to 0$ при $\alpha \to 0$ равномерно по $\mu \in \mathrm{M}(\delta_1)$.

Введем обозначения $\|\mu\| = \rho_\mu$, $\lambda = \rho_\mu^{-1}\mu$, $\|\lambda_0\| = 1$. Справедлива следующая

Теорема 3.3. Если:

1) выполняются условия 3.1–3.3;

2) $\mu = colon(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m)$, $m \ge n - r$;

3) $\alpha = colon(0, \ldots, 0, \beta_n)$, $\beta_n \in R$, $\beta_n \ne 0$;

4) справедливо представление $q_i(\mu) = v_i(\mu) + o(\|\mu\|^k)$, $i = \overline{r+1, n}$, где $v_i(\mu)$ – форма порядка k, $k \ge 2$, относительно вектора μ;

5) существует такой вектор $\lambda_0 \in R^m$, $\|\lambda_0\| = 1$, что $v(\lambda_0) = 0$, где $v(\lambda) = colon(v_{r+1}(\lambda), \ldots, v_n(\lambda))$;

6) $rangDv(\lambda_0) = n - r$, где $Dv(\lambda_0)$ – $(n-r) \times m$-мерная матрица Якоби, вычисленная при $\lambda = \lambda_0$,

то система (1.2) имеет ненулевое ω-периодическое решение.

Аналогичная теорема справедлива и в случае, когда $q_i(\mu) = \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\mu_i^{s_i} + o(\|\widetilde{\mu}\|)$, $i = \overline{r+1, n}$. $\widetilde{\mu} = colon(\mu_1^{s_1}, \dots, \mu_m^{s_m})$.

Если вместо условия 3.2 предположить выполнимость условия:

3.2'. Существует число $\delta_1 \in]0, \delta_0[$ такое, что при всех $(\alpha, \mu) \in U(\delta_1) \times M(\delta_1)$ имеет место равенство (3.2'), в котором матрицы $\overline{H}(\alpha, \mu)$, $\overline{P}(\alpha, \mu)$ определены в условии следствия к теореме 3.1,

то имеет место следующая

Теорема 3.4. Если

1) выполняются условия 3.1, 3.2';

2) $\mu = colon(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_m)$, $m \geq (n-r)^2$;

3) $\overline{\alpha} = colon(0, \dots, 0, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n)$, $\beta_i \in R$, $\beta_i \neq 0$, $i = \overline{r+1, n}$;

4) справедливо представление $\overline{h}_{ij}(\mu) = c_{ij}^k \mu_k^{s_k} + q_{ij}(\alpha, \mu)$, $i, j = \overline{r+1, n}$, $k = \overline{1, m}$, в котором $\lim\limits_{\|\alpha\| \to 0} q_{ij}(\alpha, \mu) = 0$ равномерно по $\mu \in M(\delta_1)$;

5) числа s_k, $k = \overline{1, m}$, удовлетворяют условию $(-\mu_k)^{s_k} = -\mu_k^{s_k}$;

6) $rang C = (n-r)^2$, где $C = \left[c_{ij}^k\right]_{i, j=r+1, k=1}^{n, m}$ – $(n-r)^2 \times m$-матрица, $\det \dot{C} = \begin{cases} \det C & \text{при} \quad m = (n-r)^2, \\ \det C_1 & \text{при} \quad m > (n-r)^2, \end{cases}$ при $m > (n-r)^2$ $(n-r)^2 \times (n-r)^2$-матрица C_1 определяется соотношением $C\mu = C_1\overline{\mu} + C_2\overline{\overline{\mu}}$, $\overline{\mu}$, $\overline{\overline{\mu}}$ – векторы размерностей $(n-r)^2$ и $m-(n-r)^2$ соответственно,

то система (1.2) имеет ненулевое ω-периодическое решение.

Пользуясь случаем, автор выражает искреннюю благодарность доктору физико-математических наук, профессору М. Т. Терехину за постоянное внимание к работе.

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

1. Лискина Е. Ю. Об отыскании периодического решения системы дифференциальных уравнений методом малого параметра (сообщение СВМО) // Труды Средневолжского математического общества. Саранск: Изд-во СВМО, 1999. Т. 2, № 1. С. 96-97.
2. Лискина Е. Ю. Необходимое условие существования ненулевого периодического решения в окрестности начала координат системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Ряз. гос. пед. ун-т. Рязань, 1999. 8 с. Деп. в ВИНИТИ 29.11.99, № 3504-В99.
3. Лискина Е. Ю. Достаточное условие существования ненулевого периодического решения для системы дифференциальных уравнений с параметром / Ряз. гос. пед. ун-т. Рязань, 1999. 13 с. Деп. в ВИНИТИ 29.11.99, № 3505-В99.
4. Лискина Е. Ю. Условия существования периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений (тезисы доклада) // Математика. Компьютер. Образование. Тезисы докладов VII Международной конференции (Дубна, 24-29 января 2000 г.). М.: Прогресс-Традиция, 1999. С. 203.
5. Лискина Е. Ю. Существование периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений // Известия Российской академии естественных наук. Дифференциальные уравнения. Рязань: Изд-во РГПУ, 2000. № 3. С. 53-59.
6. Лискина Е. Ю. О периодических решениях системы дифференциальных уравнений // Известия Российской ака-

демии естественных наук. Дифференциальные уравнения. Рязань: Изд-во РГПУ, 2000. № 3. С. 60-65.

7. Лискина Е. Ю. Нахождение условий существования периодических решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений / Ряз. гос. пед. ун-т. Рязань, 2000. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 07.04.00, № 938-В00.
8. Лискина Е. Ю. К вопросу о существовании ненулевых периодических решений системы дифференциальных уравнений / Ряз. гос. пед. ун-т. Рязань, 2000. 12 с. Деп. в ВИНИТИ 07.04.00, № 939-В00.
9. Лискина Е. Ю. Существование периодического решения специального вида системы обыкновенных дифференциальных уравнений (тезисы доклада) // Новые информационные технологии в научных исследованиях и в образовании. Тезисы докладов 5 всероссийской научно-технической конференции студентов, молодых ученых и специалистов (Рязань, 23-25 мая 2000 г.). Рязань: Изд-во РГРТА, 2000. С. 18-20.
10. Лискина Е. Ю. Существование семейства периодических решений системы дифференциальных уравнений (тезисы доклада) // Метод функций Ляпунова и его приложения. Тезисы докладов V Крымской Международной математической школы (Крым, Алушта, 5-13 сентября 2000 г.). Симферополь: Изд-во ТНУ, 2000. С. 101.